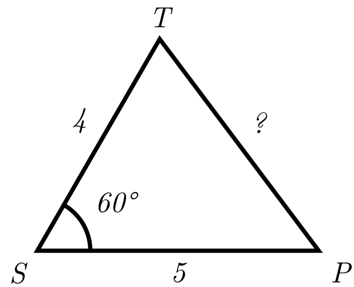
Exercice 1 (Calcul de longueur). *Pour installer un câble entre une tour T et un pylône P, on aimerait connaitre la distance qui les sépare. Malheureusement, le terrain accidenté entre eux rend une mesure directe difficile.*

En revanche, on a pu mesurer la distance de ces deux objets par rapport à un sapin S situé un peu plus loin, ainsi que l'angle formé par ces trois objets. Ces mesures sont schématisées dans le graphique suivant (qui n'est pas à l'échelle). Toutes les longueurs sont données en hectomètres.



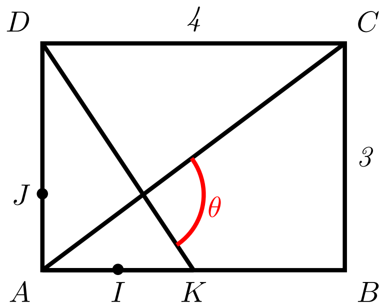
Calculer une approximation de la longueur TP au mètre près. On applique le théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned} TP^2 &= TS^2 + PS^2 - 2 \times TS \times PS \times \cos \widehat{TSP} \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Donc $TP = \sqrt{21} \approx 4,58$, soit 4,58 hm.

Exercice 2 (Calcul d'angle).

On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un rectangle, K est le milieu de $[AB]$, et $AI = AJ = 1$. Toutes les longueurs sont données en centimètres.



Le but de l'exercice est de déterminer une mesure de l'angle θ.

1. (a) *Calculer la longueur des segments $[AC]$ et $[DK]$.* En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B, on obtient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25$, donc $AC = 5$. De même pour DK, dans le triangle ADK rectangle en K, on obtient $DK^2 = 13$, soit $DK = \sqrt{13}$.

(b) *En déduire que* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 5\sqrt{13}\cos\theta$. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} &= AC \times DK \times \cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DK}\right)\\ &= 5 \times \sqrt{13} \times \cos\theta\end{aligned}$$

2. *On se place dans le repère orthonormé* (A, I, J). *Donner, sans justifier, les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{DK}$, *puis en déduire que* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = -1$. Les coordonnées sont $\overrightarrow{AC}\binom{4}{3}$ et $\overrightarrow{DK}\binom{2}{-3}$, donc le produit scalaire est : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 4 \times 2 + 3 \times (-3) = 8 - 9 = -1$.
3. *En déduire une valeur approchée au dixième de degré de* θ. D'une part, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 5\sqrt{13}\cos\theta$; d'autre part, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = -1$. Donc :

$$\begin{aligned}5\sqrt{13}\cos\theta &= -1\\ \cos\theta &= -\frac{1}{5\sqrt{13}}\\ \theta &= \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)\\ \theta &\approx 93,2\end{aligned}$$

Exercice 3 (Calcul)**.** *Étant donné trois vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$, *on donne : (i)* $||\overrightarrow{u}|| = 1$ *(ii)* $||\overrightarrow{v}|| = 3$ *(iii)* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2$ *(iv)* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = -1$

1. *Calculer :* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 &= \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2\\ &= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2\\ &= 1^2 + 2 \times 2 + 3^2\\ &= 14\end{aligned}$$

2. *Calculer :* $\overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$. *Que peut-on dire des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ *?*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}\\ &= 2 + 2 \times (-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

En admettant que le vecteur $\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ ne soit pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux.

Exercice 4 (Lieu géométrique)**.** Corrigé en classe.