

Exercice 1 (Trigonométrie). *Un formulaire contenant quelques égalités de trigonométrie est disponible en fin de sujet.*

On considère un nombre x dont on ne sait rien d'autre que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. On souhaiterait déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\cos 2x$.

1. Montrer que $\cos x = \frac{2}{3}$.
2. Déterminer la valeur de $\cos 2x$.

Exercice 2 (Trigonométrie).

1. Simplifier l'expression suivante.

$$A = \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}$$

2. En déduire la valeur de A .

Exercice 3 (Variations de suites). On considère les suites u et v définies sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{3^n}{4}$ et $v_n = -n^2 - 2n$.

1. *Étude de u .*
 - (a) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n .
 - (b) En déduire que la suite u est croissante sur \mathbb{N} .
2. *Étude de v .* Déterminer les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = -x^2 - 2x$, puis en déduire les variations de v .
3. Comparer $u_{9 \times 10^9}$ et $v_{9 \times 10^9}$.

Exercice 4 (Suite arithmético-géométrique). Une bibliothèque possède 8 000 livres. Chaque année, elle jette 5 % de ses ouvrages, obsolètes, et en achète 500 nouveaux.

On appelle u la suite définie sur \mathbb{N} par « u_n est le nombre d'ouvrages de la bibliothèque au début de l'année $2017+n$ » (ainsi, $u_0 = 8000$ est le nombre d'ouvrages en 2017, u_1 en 2018, etc.).

1. Montrer que $u_1 = 8100$ et $u_2 = 8195$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 10000$.

3. Montrer que v est une suite géométrique de premier terme -2000 et de raison $0,95$.
4. En déduire le terme général de v .
5. Calculer u_{10} . Combien de livres possèdera la bibliothèque en 2027 ?

Exercice 5 (Culture générale). Répondre à au moins une des deux questions suivantes.

1. Raconter une blague mathématique que vous trouvez drôle (au sens large : citation amusante, histoire drôle, bande dessinée ou dessin d'humour, etc.). On se limitera aux blagues non discriminantes (pas de blagues racistes, sexistes, homophobes, etc.).
2. Citer une œuvre d'art ayant pour objet les mathématiques, c'est-à-dire :
 - donner son titre (si elle en a un), le nom de l'auteur, la date de création ;
 - si c'est un texte, recopier ou imprimer l'œuvre ou un extrait ; si c'est une œuvre plastique, en imprimer une photographie (ou me l'envoyer par courriel) ; si c'est une musique, me l'envoyer par courriel (ou un lien vers celle-ci) ; etc.