

Faire l'un des exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 1 est plus difficile).
Les exercices 3 et 4 sont obligatoires.

Exercice 1 (Jeu infini). Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.

Par exemple : une joueuse lance le dé et obtient 1 : elle gagne un bonbon et rejoue. Elle fait à nouveau 1 : elle gagne un second bonbon. Elle relance le dé et obtient 3 : elle gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Elle a gagné au total 5 bonbons.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.

On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1 + E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer (qui est identique au gain moyen du jeu). Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1 + E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Dresser la loi de probabilité de X .

Gain	$1 + E(X)$	2	3	4	5	6
Probabilité	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Toutes les probabilités sont égales car le dé est équilibré.

2. En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que $E(X) = \frac{21+E(X)}{6}$.

$$E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + E(X)) + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \dots + \frac{1}{6} \times 6$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times E(X) + \frac{20}{6}$$

$$E(X) = \frac{21 + E(X)}{6}$$

3. Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.

$$E(X) = \frac{21 + E(X)}{6}$$

$$6E(X) = 21 + E(X)$$

$$5E(X) = 21$$

$$E(X) = \frac{21}{5}$$

Donc le gain moyen est $\frac{21}{5}$, soit 4,2 bonbons par partie.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que si l'espérance $E(X)$ existe, elle est égale à cette valeur.

4. Difficile. *Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que la résolution de l'équation obtenue par la même méthode qu'à la question 2 ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?*

Je remplace discrètement le dé par un dé pipé qui fait toujours 1. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y représentant la nouvelle expérience est donc :

Gain	$1 + E(X)$
Probabilité	1

Donc l'espérance est $E(X) = 1 \times (1 + E(X))$, et en résolvant l'équation, on trouve $0 = 1$, ce qui est impossible. L'équation n'a donc pas de solutions.

Le problème de cette expérience est que l'espérance est infinie : en moyenne, on « gagne » une infinité de bonbons. La méthode utilisée à la question précédente ne fonctionne donc plus.

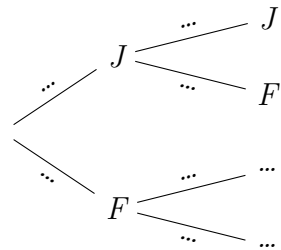
Exercice 2 (QCM). *Un exercice est composé de quatre questions à choix multiple. Chaque question a trois propositions de réponses, dont une seule est correcte.*

Une réponse correcte rapporte 2 points ; une réponse incorrecte en enlève 1. Un score final négatif est ramené à zéro.

Un élève répond au hasard à ce QCM ; on note X la variable aléatoire associée au nombre de points gagnés.

1. L'arbre de probabilité ci-dessous (dans lequel J signifie « Réponse juste » et F signifie « Réponse fausse »), qui décrit l'expérience aléatoire composée de la succession des réponses aux quatre questions, est incomplet : il ne décrit que (partiellement) les deux premières questions, et il manque les probabilités.

Recopier et compléter cet arbre :
 (a) tracer les branches manquantes ; (b) écrire les probabilités ; (c) écrire, pour chaque branche, le nombre de réponses correctes, et sa probabilité.



Voir l'arbre sur la figure 1.

2. En utilisant l'arbre de la question précédente, recopier et compléter le tableau suivant, pour déterminer la loi de probabilité de X .

Réponses correctes	0	1	2	3	4
Nombre de points	0	0	2	5	8
Probabilité	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Note : Pour calculer les probabilités, on a ajouté les probabilités de toutes les branches ayant le même nombre de réponses justes.

3. Calculer l'espérance et la variance de X . À la calculatrice, on obtient $E(X) \approx 1,2$, et $\sigma(X) \approx 1,7$ (donc $V(X) = \sigma(X)^2 \approx 2,9$).
4. Quelle est la note moyenne qu'obtiendraient un grand nombre de candidats répondant au hasard ? Ils obtiendraient une note moyenne de 1,2 sur 8.

Exercice 3 (Valeurs remarquables). Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

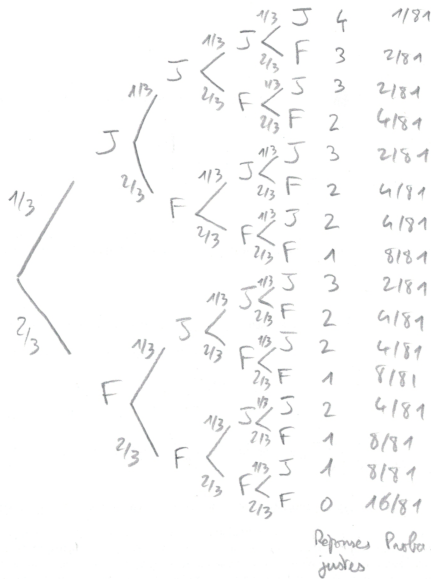
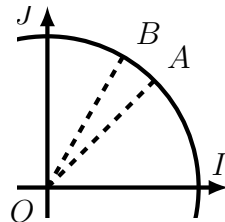


FIGURE 1 – Arbre de probabilité de l'exercice 2.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A et B , tels que $(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$.



1. (a) Rappeler les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, et $\sin \frac{\pi}{3}$.
 $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (b) Déterminer les coordonnées de A et B , puis des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} . Puisque les points A et B sont sur le cercle trigonométrique, alors leurs coordonnées sont les cosinus et sinus de leurs angles, soit : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- (c) En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\end{aligned}$$

2. (a) *Démontrer, de manière aussi rigoureuse que possible, que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12}$.*

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) \\ &= -(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

- (b) *Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{12}$.*

On a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. Or puisque A et B sont sur le cercle trigonométrique, alors $OA = OB = 1$, donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \frac{\pi}{12}$.

3. *En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.* Nous avons calculé le même produit scalaire de deux manières différentes. Ces deux valeurs sont donc égales, et :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$