

Exercice 1.

1. Donner les valeurs de u_1 et u_3 .
2. On admet que u est une suite arithmétique. Préciser ses paramètres (premier terme et raison).
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Sam a fini les cinquante niveaux du jeu. Combien de chats a-t-elle ramené au total ?
5. Donner les valeurs de u_1 et u_3 . Le terme u_1 est le nombre de chats à ramener au premier niveau, soit $u_1 = 2$. De même, $u_3 = 8$.
6. On admet que u est une suite arithmétique. Préciser ses paramètres (premier terme et raison). Puisque d'une part, $u_1 = 2$ et $u_3 = 8$, et que d'autre part, $u_3 = u_1 + (3 - 1) \times r$, alors :

$$u_3 = u_1 + (3 - 1) \times r$$

$$8 = 2 + 2r$$

$$6 = 2r$$

$$3 = r$$

Donc la raison est 3, et le premier terme est $u_1 = 2$.

7. Exprimer u_n en fonction de n . C'est une suite arithmétique, donc $u_n = u_1 + (n - 1)r = 2 + 3(n - 1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$.
8. Sam a fini les cinquante niveaux du jeu. Combien de chats a-t-elle ramené au total ? On doit calculer la somme des

cinquante premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50} u_n &= 50 \times \frac{u_1 + u_{50}}{2} \\ &= 50 \times \frac{2 + 3 \times 50 - 1}{2} \\ &= 3775\end{aligned}$$

Elle a donc ramené au total 3775 chats.

Exercice 2 (Problème ouvert). On appelle u la suite définie sur \mathbb{N}^* par : u_n est le nombre de cubes de l'étage n (en partant du haut). C'est une suite arithmétique de premier terme¹ $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n , on a $u_n = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_n &\leq 1729 \\ n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leq 1729 \\ n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leq 1729 \\ n \times \frac{2n}{2} &\leq 1729 \\ n^2 &\leq 1729 \\ n &\leq \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}\end{aligned}$$

Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41.

La pyramide aura donc 41 étages.

Le nombre de cubes utilisés sera alors $41 \times \frac{u_1 + u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1 + 2 \times 41 - 1}{2} = 1681$, et il restera $1729 - 1681 = 48$ cubes inutilisés.

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre le numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7^e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7 , par exemple).