14/05/18
DS n° 8 — B

Dérivation Équations cartésiennes

$1^e S$

Exercice 1 (Dérivation — 4 points)**.** Les deux questions sont indépendantes.

1. Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-4}$.
2. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

Exercice 2 (Distance d'un point à une courbe — 8 points)**.** On considère la courbe carrée $f : x \mapsto x^2$, sa courbe $\mathcal{C}$, et le point $A(0,5)$ dans le plan ramené à un repère orthonormé. Le but de l'exercice est de déterminer quel est le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de A.
Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que $AM = \sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}$.

On pose $g : x \mapsto x^4 - 9x^2 + 25$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 2x\left(2x^2 - 9\right)$.
3. Montrer que le tableau de variations de g est le suivant (on ne demande pas de calculer les valeurs des extremums).

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{9}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{9}{2}}$		$+\infty$
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. En déduire les variations de f.
5. Répondre au problème posé : Pour quelles valeurs de x la distance AM est-elle minimale ?

Exercice 3 (Cercles — 8 points)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}_1$ défini par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2x - 14y - 175 = 0$, et le cercle $\mathcal{C}_2$, de centre $B(15;19)$ et de rayon 5.

1. Déterminer les coordonnées du centre A de $\mathcal{C}_1$, et son rayon.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$, en justifiant.
3. Le point $D(11;16)$ est-il un point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des abscisses.