

Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points).
Démontrer, aux choix, l'une des propriétés suivantes.

- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- La courbe de la fonction carrée est en dessous de celle de la fonction $x \mapsto x$, elle-même en dessous de celle de la fonction racine carrée sur $]0; 1[$.
- La courbe de la fonction carrée est au dessus de celle de la fonction $x \mapsto x$, elle-même au dessus de celle de la fonction racine carrée sur $]1; +\infty[$.

Exercice 2 (Valeur absolue — 4 points). *Les questions sont indépendantes.*

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto |-x + 2| + |3 + x|$$

Calculer $f(4)$ (en détaillant les calculs).

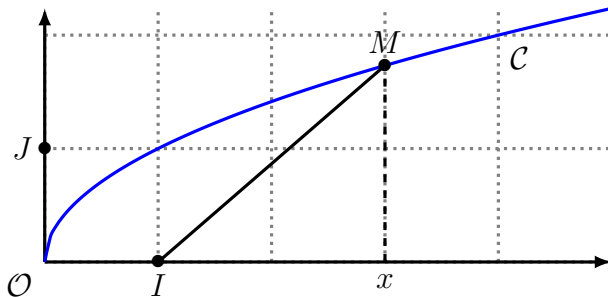
2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x^2| = x^2$.

Tourner la page.

Exercice 3 (Position relative de courbes — 6 points). On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ et $g : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 9$. On souhaite étudier la position relative de ces deux courbes, appelées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

1. Montrer que \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g si et seulement si $2x^2 - 8 \geq 0$.
2. Dresser le tableau de signes du trinôme $2x^2 - 8$.
3. En déduire sur quel(s) intervalle(s) \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g .

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe — 6 points). Dans un repère orthonormé (\mathcal{O}, I, J) , on considère la courbe \mathcal{C} de la fonction racine carrée, et le point I de coordonnées $(1; 0)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la courbe \mathcal{C} et le point I . La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.



Pour un certain nombre x positif, on appelle M le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse x .

1. Montrer que $IM = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
2. Sur \mathbb{R}^+ , déterminer les variations du trinôme $x^2 - x + 1$, puis celles de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.
3. En déduire les coordonnées de M pour lesquelles la distance IM est minimale. Combien vaut- alors cette distance ?