

Faire l'un des exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 1 est plus difficile). Les exercices 3 et 4 sont obligatoires.

**Exercice 1** (Jeu infini). Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.

Par exemple : une joueuse lance le dé et obtient 1 : elle gagne un bonbon et rejoue. Elle fait à nouveau 1 : elle gagne un second bonbon. Elle relance le dé et obtient 3 : elle gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Elle a gagné au total 5 bonbons.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X$  associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.

On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne  $1 + E(X)$ , c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer. Les valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  sont alors  $\{1 + E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

1. Dresser la loi de probabilité de  $X$ .
2. En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que  $E(X) = \frac{21+E(X)}{6}$ .
3. Résoudre l'équation pour déterminer  $E(X)$ .

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que  $E(X)$  est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que si l'espérance  $E(X)$  existe, elle est égale à cette valeur.

4. Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que la résolution de l'équation obtenue par la même méthode qu'à la question 2 ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?

**Exercice 2** (QCM). Un exercice est composé de quatre questions à choix multiple. Chaque question a quatre propositions de réponses, dont une seule est correcte.

Une réponse correcte rapporte 2 points ; une réponse incorrecte en enlève 1. Un score final négatif est ramené à zéro.

Un élève répond au hasard à ce QCM ; on note  $X$  la variable aléatoire associée au nombre de points gagnés.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, pour déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

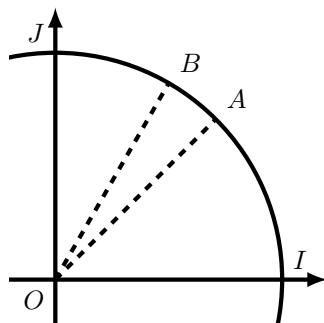
Réponses correctes	0	1	2	3	4
Nombre de points					
Probabilité					

Remarque : Calculer les probabilités de cette variable aléatoire ne se fait pas (encore) de tête. Il sera sans doute nécessaire d'utiliser un outil approprié, comme un arbre de probabilités par exemple.

- Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
- Quelle est la note moyenne qu'obtiendraient un grand nombre de candidats répondant au hasard ?

**Exercice 3** (Valeurs remarquables). Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ . On considère les points  $A$  et  $B$ , tels que  $(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{4}$  et  $(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$ .



- Rappeler les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \frac{\pi}{3}$ , et  $\sin \frac{\pi}{3}$ .
  - Déterminer les coordonnées de  $A$  et  $B$ .
  - En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ .
- Démontrer, de manière aussi rigoureuse que possible, que  $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{12}$ .
  - Exprimer le produit scalaire  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  en fonction de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .
- En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 4** (Exercices libres). Choisir un exercice sur le site web <http://pyromaths.org>, imprimer l'énoncé, résoudre cet exercice, et corriger vous-même votre travail (je ne le corrigerai pas moi-même, sauf, si vous le mentionnez dans votre copie). Rendre l'énoncé avec la copie.

Par exemple (mais vous pouvez aussi faire un autre exercice que celui-ci) :

— Classe de seconde → Trigonométrie : Chapitre en cours.

- *Classe de première S* → *Nombre dérivé graphiquement* : Prochain chapitre, sur les dérivées.
- *Classe de première S* → *Étude de signe* : Prochain chapitre, sur les dérivées.