

**Exercice 1** (Trigonométrie — 4 points). *Un formulaire contenant quelques égalités de trigonométrie est disponible en fin de copie.* On considère un nombre  $x$  dont on ne sait rien d'autre que  $\sin x = \frac{\sqrt{8}}{3}$ . On souhaiterait déterminer les valeurs exactes de  $\cos x$  et  $\cos 2x$ .

1. Montrer que  $\cos x = \frac{1}{3}$ .
2. Déterminer la valeur de  $\cos 2x$ .

**Exercice 2** (Trigonométrie — 3 points).

1. Simplifier l'expression suivante.

$$A = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$$

2. En déduire la valeur de  $A$ .

**Exercice 3** (Variations de suites — 8 points). On considère les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{4^n}{3}$  et  $v_n = -2n^2 - 4n$ .

1. *Étude de  $u$ .*
  - (a) Exprimer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en fonction de  $n$ .
  - (b) En déduire que la suite  $u$  est croissante sur  $\mathbb{N}$ .
2. *Étude de  $v$ .* Déterminer les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = -2x^2 - 4x$ , puis en déduire les variations de  $v$ .
3. Comparer  $u_{8 \times 10^9}$  et  $v_{8 \times 10^9}$ .

**Exercice 4** (Suite arithmético-géométrique — 5 points).

Une bibliothèque possède 8 000 livres. Chaque année, elle jette 5 % de ses ouvrages, obsolètes, et en achète 500 nouveaux.

On appelle  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par «  $u_n$  est le nombre d'ouvrages de la bibliothèque au début de l'année 2017 +  $n$  » (ainsi,  $u_0 = 8000$  est le nombre d'ouvrages en 2017,  $u_1$  en 2018, etc.).

1. Montrer que  $u_1 = 8100$  et  $u_2 = 8195$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - 10000$ .

3. Montrer que  $v$  est une suite géométrique de premier terme  $-2000$  et de raison  $0,95$ .
4. En déduire le terme général de  $v$ .
5. Calculer  $u_{10}$ . Combien de livres possèdera la bibliothèque en 2027 ?

**Propriété** (Formulaire). Pour tout nombre réel  $a$ , on a :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$