

Exercice 1 (Trigonométrie — 4 points). *Un formulaire contenant quelques égalités de trigonométrie est disponible en fin de copie.* On considère un nombre x dont on ne sait rien d'autre que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. On souhaiterait déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\cos 2x$.

1. Montrer que $\cos x = \frac{2}{3}$.
2. Déterminer la valeur de $\cos 2x$.

Exercice 2 (Trigonométrie — 3 points).

1. Simplifier l'expression suivante.

$$A = \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}$$

2. En déduire la valeur de A .

Exercice 3 (Variations de suites — 8 points). On considère les suites u et v définies sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{3^n}{4}$ et $v_n = -n^2 - 2n$.

1. *Étude de u .*
 - (a) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n .
 - (b) En déduire que la suite u est croissante sur \mathbb{N} .
2. *Étude de v .* Déterminer les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = -x^2 - 2x$, puis en déduire les variations de v .
3. Comparer $u_{9 \times 10^9}$ et $v_{9 \times 10^9}$.

Exercice 4 (Suite arithmético-géométrique — 5 points).

Une bibliothèque possède 8 000 livres. Chaque année, elle jette 5 % de ses ouvrages, obsolètes, et en achète 500 nouveaux.

On appelle u la suite définie sur \mathbb{N} par « u_n est le nombre d'ouvrages de la bibliothèque au début de l'année 2017 + n » (ainsi, $u_0 = 8000$ est le nombre d'ouvrages en 2017, u_1 en 2018, etc.).

1. Montrer que $u_1 = 8100$ et $u_2 = 8195$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 10000$.

3. Montrer que v est une suite géométrique de premier terme -2000 et de raison $0,95$.
4. En déduire le terme général de v .
5. Calculer u_{10} . Combien de livres possèdera la bibliothèque en 2027 ?

Propriété (Formulaire). Pour tout nombre réel a , on a :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$