Généralités sur les fonctions

Exercice 1 (Somme de fonctions)**.**

1. Dans chacun des cas suivants, dans un même tableau, donner les variations de u, v et $u+v$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = -\frac{x}{2} + 3$;
   (b) $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 2x + 4$;
   (c) $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x + 1$.
2. Commenter l'affirmation suivante : « *La somme de deux fonctions monotones sur un intervalle I est monotone sur I.* »

Exercice 2 (Fonction cube)**.** On appelle *fonction cube* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice (ou d'un ordinateur), les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que, si $a < 0 < b$, alors $a^3 < b^3$.
3. (a) Montrer que pour tous réels a et b, on a :
   $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
   (b) Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$ si a et b sont de même signe ?
   (c) En déduire que si $a < b$, et a et b sont de même signe, alors $a^3 < b^3$.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$.
5. Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction cube.

Exercice 3 (Exercice libre)**.** Choisir un exercice sur le site web `http://pyromaths.org`, imprimer l'énoncé (ou me l'envoyer par courriel), et résoudre cet exercice. Rendre l'énoncé avec la copie.

Exercice 4 (Défi – Optionnel)**.** Déterminer la valeur exacte des nombres suivants.

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots}}}} \qquad\qquad b = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$