18/03/16 *DS nº 6 — B*

Probabilités Trigonométrie

1ᵉS6

Exercice 1 (Jeu — 8 points). *Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 60 minutes de communication une fois sur six, 40 minutes une fois sur trois et 20 minutes sinon.*

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. (a) *Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.* La première étape est de déterminer la loi de probabilité de X (la troisième ligne a été ajoutée en prévision du calcul de la variance).

x_i	60	40	20
$P(X = x_i)$	$^1/_6$	$^1/_3$	$^1/_2$
x_i^2	3600	1600	400

Donc $E(X) = 60\times\frac{1}{6}+40\times\frac{1}{3}+20\times\frac{1}{2} = \frac{60+80+60}{6} = \frac{100}{3}$.

Calculons la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= 3600 \times \frac{1}{6} + 1600 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{100}{3}\right) \\ &= \frac{12000}{9} - \frac{10000}{9} \\ &= \frac{2000}{9} \end{aligned}$$

Et donc l'écart-type est égal à $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{2000}{9}} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$, soit environ 15 minutes.

(b) *Que représente cette espérance ?* Cette espérance est le temps moyen de communication gagné par les participants au sondage.

2. *Pour motiver plus particulièrement les adolescents, l'opérateur remplace dans le tirage au sort chaque minute de communication par 10* SMS. *On appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de* SMS *gagnés.*

   (a) *Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X.* Puisque chaque minute est convertie en 10 SMS, alors $Y = 5X$.

   (b) *En déduire l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y.* Donc $E(Y) = E(5X) = 5E(X) = \frac{500}{3}$.

   De même, $\sigma(Y) = \sigma(5X) = 5\sigma(X) = \frac{100\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 2 (Angles orientés — 2 points)**.**

1. *Calculer une mesure en radians d'un angle de 96°.*

   Faisons un tableau de proportionnalité.

Degrés	180	96
Radians	π	

   Donc une mesure en radian de cet angle est $\frac{96\times\pi}{180}$, soit, une fois simplifié, $\frac{24\pi}{45}$.

2. *Donner la mesure principale de $-\frac{16\pi}{7}$.* On a $-\frac{16\pi}{7} = -\frac{2\pi}{7} - 2\pi$. Donc la mesure principale de cet angle est $-\frac{2\pi}{7}$.

Exercice 3 (Équations trigonométriques — 8 points)**.**

1. *On donne* $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(a) *Montrer que* $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$. En prenant $t = \frac{\pi}{8}$, alors $\frac{\pi}{2} - t = \frac{3\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$. Donc $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(b) *Résoudre* $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \cos x &= \cos\frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Donc les solutions sont $x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$) et $x = -\frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

2. (a) *Montrer que les solutions de* $\sin x = \sin 2x$ *sont* $x = -2k\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$ *(pour* $k \in \mathbb{Z}$*).* Les solutions sont les ensembles $x = 2x + 2k\pi$ et $x = \pi - 2x + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

Premier cas Si $x = 2x + 2k\pi$, alors (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} x &= 2x + 2k\pi \\ x - 2x &= 2k\pi \\ -x &= 2k\pi \\ x &= 2k\pi \end{aligned}$$

Second cas Si $x = \pi - 2x + 2k\pi$, alors (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} x &= \pi - 2x + 2k\pi \\ x + 2x &= \pi + 2k\pi \\ 3x &= \pi + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'union de $x = 2k\pi$ et $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(b) *En déduire les solutions de cette même équation comprises dans l'intervalle* $[0; \pi]$. Dans le premier cas ($x = 2k\pi$), la seule valeur de k pour laquelle $x \in [0; \pi]$ est obtenue pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$.

Dans le second cas ($x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$), $x \in [0; \pi]$ est équivalent à : $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} & \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} & \leqslant \pi \end{array} \right.$, c'est-à-dire à $\left\{ \begin{array}{r} k \geqslant -\frac{1}{2} \\ k \leqslant 1 \end{array} \right.$. Puisque k est un entier, seules deux solutions existent : $k = 0$ et $k = 1$. Cela donne $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \pi$.

Il n'y a donc que trois solutions $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, et $x = \pi$.

3. *Résoudre* $\sin x + 2\cos(-2x) = 4$. La plus grande valeur que peut prendre un cosinus est 1, celle d'un sinus est également 1. Donc la somme $\cos x + 2\sin(-2x)$ ne peut pas prendre une valeur plus grande que 3. Donc l'équation n'a pas de solutions.