18/03/16 | **Probabilités — Trigonométrie** | *1^e S6*

DS n° 6 — A

Exercice 1 (Angles orientés — 2 points)**.**

1. *Calculer une mesure en radians d'un angle de 48°.*
   Faisons un tableau de proportionnalité.

Degrés	180	48
Radians	π	

   Donc une mesure en radian de cet angle est $\frac{48\times\pi}{180}$, soit, une fois simplifié, $\frac{12\pi}{45}$.
2. *Donner la mesure principale de* $-\frac{18\pi}{5}$*.*
   On a $-\frac{18\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} - 4\pi$. Donc la mesure principale de cet angle est $\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 2 (Équations trigonométriques — 8 points)**.**

1. *On donne* $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
   (a) *Montrer que* $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
   On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$. En prenant $t = \frac{3\pi}{8}$, alors $\frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8}$. Donc $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
   (b) *Résoudre* $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$\sin x = \sin\frac{3\pi}{8}$$

Donc, puisque $\pi - \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$, les solutions sont $x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$) et $x = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

2. (a) *Montrer que les solutions de* $\cos x = \cos 2x$ *sont* $x = -2k\pi$ *ou* $x = \frac{2}{3}k\pi$ *(pour* $k \in \mathbb{Z}$*).*

   Les solutions sont les ensembles $x = 2x + 2k\pi$ et $x = -2x + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

   Premier cas Si $x = 2x + 2k\pi$, alors (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} x &= 2x + 2k\pi \\ x - 2x &= 2k\pi \\ -x &= 2k\pi \\ x &= 2k\pi \end{aligned}$$

   Second cas Si $x = -2x + 2k\pi$, alors (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned} x &= -2x + 2k\pi \\ x + 2x &= 2k\pi \\ 3x &= 2k\pi \\ x &= \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est donc l'union de $x = 2k\pi$ et $x = \frac{2k\pi}{3}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Nous pouvons remarquer que le second ensemble inclut le premier.

   (b) *En déduire les solutions de cette même équation comprises dans l'intervalle* $[0; \pi]$.

   Dans le premier cas ($x = 2k\pi$), la seule valeur de k pour laquelle $x \in [0; \pi]$ est obtenue pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$.

Dans le second cas ($x = \frac{2k\pi}{3}$), $x \in [0;\pi]$ est équivalent à : $\left\{\begin{array}{ll} \frac{2k\pi}{3} & \geqslant 0 \\ \frac{2k\pi}{3} & \leqslant \pi \end{array}\right.$, c'est-à-dire à $\left\{\begin{array}{l} k \geqslant 0 \\ k \leqslant \frac{3}{2} \end{array}\right.$.
Puisque k est un entier, seules deux solutions existent : $k = 0$ et $k = 1$. Cela donne $x = 0$ et $x = \frac{2\pi}{3}$.
Il n'y a donc que deux solutions $x = 0$ et $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. *Résoudre* $\cos x + 2\sin(-2x) = 4$. La plus grande valeur que peut prendre un cosinus est 1, celle d'un sinus est également 1. Donc la somme $\cos x + 2\sin(-2x)$ ne peut pas prendre une valeur plus grande que 3. Donc l'équation n'a pas de solutions.

Exercice 3 (Jeu — 8 points)**.** *Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.*

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. (a) *Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.* La première étape est de déterminer la loi de probabilité de X (la troisième ligne a été ajoutée en prévision du calcul de la variance).

x_i	30	20	10
$P(X = x_i)$	$^1/_6$	$^1/_3$	$^1/_2$
x_i^2	900	400	100

Donc $E(X) = 30\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{2} = \frac{30+40+30}{6} = \frac{50}{3}$.

Calculons la variance :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= 900 \times \frac{1}{6} + 400 \times \frac{1}{3} + 100 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{50}{3}\right)^2 \\
&= \frac{3000}{9} - \frac{2500}{9} \\
&= \frac{500}{9}
\end{aligned}$$

Et donc l'écart-type est égal à $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$, soit environ 7,5 minutes.

(b) *Que représente cette espérance ?* Cette espérance est le temps moyen de communication gagné par les participants au sondage.

2. *Pour motiver plus particulièrement les adolescents, l'opérateur remplace dans le tirage au sort chaque minute de communication par 5* SMS. *On appelle Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de* SMS *gagnés.*

   (a) *Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X.* Puisque chaque minute est convertie en 5 SMS, alors $Y = 5X$.

   (b) *En déduire l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y.* Donc $E(Y) = E(5X) = 5E(X) = \frac{250}{3}$.
   De même, $\sigma(Y) = \sigma(5X) = 5\sigma(X) = \frac{50\sqrt{5}}{3}$.