15/01/16
DS n° 4 — B

Dérivation
Statistiques

1^e S6

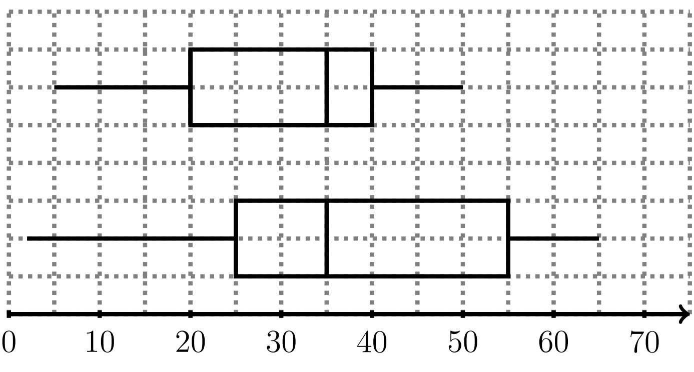
Exercice 1 (Diagramme en boîte — 8 points). *Dans cette question, les extrémités des diagrammes en boîte représentent les valeurs extrêmes.*

On a réalisé une enquête sur le temps, en secondes, que doit attendre un abonné qui contacte, par téléphone, un fournisseur d'accès à internet A. Cette enquête a concerné 100 abonnés et donné les résultats suivants.

Temps d'attente (s)	*5*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*
Nombre d'abonnés	*10*	*12*	*16*	*12*	*29*	*21*

1. *Calculer la moyenne et l'écart-type de la série.* La calculatrice nous donne une moyenne de $\bar{x} = 30{,}6\,\text{s}$ et un écart-type de $\sigma \approx 15{,}5\,\text{s}$.
2. (a) *Calculer la médiane et les quartiles de cette série.* Il y a 100 valeurs, donc la médiane est la moyenne des 50$^{\text{e}}$ et 51$^{\text{e}}$ valeurs, soit 35 s. Le premier quartile est la 25$^{\text{e}}$ valeur, soit 20 s, et le troisième est la 75$^{\text{e}}$ valeur, soit 40 s.

   (b) *Un autre fournisseur d'accès, B, a réalisé la même enquête auprès de 100 de ses abonnés, et a représenté la série obtenue par le diagramme en boîte ci-dessous. Représenter par un diagramme en boîte la série obtenue pour le fournisseur A sur le même repère.*



   (c) *Comparer les deux séries : y a-t-il une des plates-formes téléphoniques qui est meilleure que l'autre, en ce qui concerne* *le temps d'attente ?* Même si la médiane est la même pour les deux séries, les quartiles sont moins grands pour la série A, de même que la valeur maximale. Globalement, les temps d'attente de la plate-forme A sont donc plus courts que ceux de la plate-forme B : la plate-forme A est meilleure que la B.

Exercice 2 (Tangente — 6 points)**.** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+1}$.*

1. *Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$.* On a une fonction de type $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u : x \mapsto x+2$ et $v : x \mapsto x^2+1$, et donc $u' : x \mapsto 1$ et $v' : x \mapsto 2x$. Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1 \times (x^2+1) - 2x(x+2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

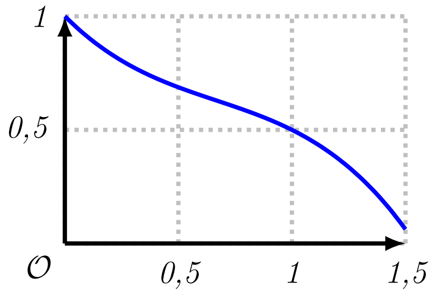
2. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse* 1. L'équation de la tangente en 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = \frac{-1^2-4\times1+1}{(1^2+1)^2} = -1$, et $f(1) = \frac{3}{2}$. Donc l'équation de la tangente est :
$$\begin{aligned} y &= -(x-1) + \frac{3}{2} \\ y &= -x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

3. *Existe-t-il un point de la courbe dont la tangente soit parallèle à l'axe des abscisses ?* Pour que la tangente soit parallèle à l'axe des abscisse, il faut que son coefficient directeur soit nul. Or le coefficient directeur de la tangente est la dérivée de la fonction. Nous cherchons donc si la dérivée est nulle en un point, ce qui revient à résoudre :
$$\frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2} = 0$$

C'est une équation quotient. Elle est vraie si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul. Mais le dénominateur est toujours strictement positif, donc nous cherchons un x tel que $-x^2-4x+1=0$. C'est un trinôme du second degré, de déterminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 20$. Il y a donc deux solutions, et il existe donc deux valeurs de x (les racines du trinôme) pour lesquelles $f'(x)$ est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3 (Toboggan — 6 points). *Vous êtes ingénieur dans une entreprise de fabrication d'attractions, et un parc aquatique vous commande un toboggan. La forme souhaitée est la courbe représentée ci-dessous (où x est l'abscisse, et $f(x)$ l'altitude, toutes les deux en décamètres), dont l'équation est :*

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 1$$



Le toboggan est considéré comme dangereux s'il n'est pas trop pentu, c'est-à-dire si à aucun endroit la pente est inférieure à -2.

Le but de l'exercice est d'étudier le toboggan pour savoir s'il est dangereux ou non.

1. *Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$.* La dérivée de $x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$ est $x \mapsto -\frac{3}{2}x^{3-1} = -\frac{3}{2}x^2$, celle de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$, et celle de $x \mapsto -x+1$ est $x \mapsto 1$. Donc la dérivée de f est $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$.
2. *Montrer que $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 < -2$ si et seulement si*

$$x \in \left]-\infty; \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3}; +\infty\right[$$

L'inéquation $-\frac{3}{2}x^2+2x-1 < -2$ est équivalente à $-\frac{3}{2}x^2+2x+1 < 0$. En calculant le déterminant de ce trinôme, puis les racines (je vous laisse détailler les calculs), nous obtenons le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$-\frac{3}{2}x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions sont conformes à ce qui était demandé.

3. *Le toboggan est-il dangereux ?* Le toboggan est dangereux s'il existe x tel que $f'(x) \leqslant -2$. Nous venons de montrer que tous les x de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3}; +\infty\right[$ sont solution. Donc à priori, le toboggan est dangereux.

   Mais seul l'intervalle $[0; 1,5]$ nous intéresse ici, et $\frac{2-\sqrt{10}}{3} < 0 < 1,5 < \frac{2+\sqrt{10}}{3}$. Donc sur l'intervalle $[0; 1,5]$, $f'(x) > -2$, et le toboggan n'est pas dangereux.