

Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points). *Voir le cours.*

Exercice 2 (Position relative — 2 points). *Déterminer la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x$, définies sur \mathbb{R} . La courbe \mathcal{C}_f de f est au dessus de la courbe \mathcal{C}_g de g en x si et seulement si $f(x) \geq g(x)$. Résolvons cette inéquation.*

$$\begin{aligned} f(x) &\geq g(x) \\ x^2 - 1 &\geq x \\ x^2 - x - 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré, dont le facteur du x^2 est positif. La fonction est donc négative entre les racines, et positive à l'extérieur. Déterminons ces racines.

Le discriminant Δ vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$. Il est positif, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2 \times (-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2 \times (-1)} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'équation est vérifiée pour $x \in]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty[$. Donc \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur ce même intervalle $]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty[$.

Exercice 3 (Valeur absolue — 4 points). *Résoudre les équations suivantes.*

- (a) $|3x - 3| = -3$ Une valeur absolue est nécessairement positive : elle ne peut pas être négative. Cette équation n'a donc aucune solutions.
- (b) $|x + 2| = 1 - x$ Il faut distinguer deux cas.

Premier cas : $1 - x < 0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x > 1$), il n'y a aucunes solutions (pour les mêmes raisons qu'à la question précédente).

Second cas : $1 - x \geq 0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x \leq 1$), il faut à nouveau distinguer deux cas.

$$x + 2 = 1 - x$$

$$2x = 1 - 2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x + 2 = -(1 - x)$$

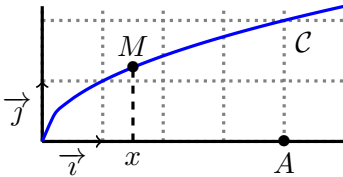
$$x + 2 = -1 + x$$

$$2 = -1$$

Il n'y a pas de solutions.

Le bilan est donc : il y a une unique solution $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe— 9 points). *Dans un repère orthonormé, on considère la courbe C de la fonction racine carrée, et le point A de coordonnées $(4; 0)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la courbe C et le point A . La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.*



Pour un certain nombre x positif, on appelle M le point de la courbe C d'abscisse x .

1. *Quelles sont, en fonction de x , les coordonnées de M ? Puisque M est sur la courbe de la fonction racine carrée, le point d'abscisse x a pour ordonnée \sqrt{x} . Ses coordonnées sont donc $M(x; \sqrt{x})$.*
2. *Montrer que $AM = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.*

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x - 4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x} \\ &= \sqrt{x^2 - 7x + 16} \end{aligned}$$

3. *Dans un même tableau de variations, tracer (en justifiant) :*

(a) *les variations de la fonction $x^2 - 7x + 16$; C 'est une fonction trinôme du second degré. Le paramètre devant x^2 est positif, donc elle est décroissante jusqu'à $-\frac{-7}{2 \times 1} = \frac{7}{2}$, et croissante ensuite.*

(b) *les variations de AM*. La racine carrée conserve les variations, donc les variations de AM sont les mêmes que celles du trinôme.

4. *En déduire les coordonnées de M pour lesquelles la distance AM est minimale. Combien vaut- alors cette distance ?* On lit sur le tableau de variations que le minimum de AM est atteint en $x = \frac{5}{2}$. La distance AM vaut alors :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{x^2 - 7x + 16} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\frac{7}{2} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{98}{4} + \frac{64}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$