Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points)**.** *Voir le cours.*

Exercice 2 (Valeur absolue — 4 points)**.** *Résoudre les équations suivantes.*

(a) $|2x-2| = -2$ Une valeur absolue est nécessairement positive : elle ne peut pas être négative. Cette équation n'a donc aucune solutions.

(b) $|x+1| = 2-x$ Il faut distinguer deux cas.

Premier cas : $2-x<0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x>2$), il n'y a aucunes solutions (pour les mêmes raisons qu'à la question précédente).

Second cas : $2-x \geqslant 0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x \leqslant 2$), il faut à nouveau distinguer deux cas.

$$\begin{aligned} x+1 &= 2-x \\ 2x &= 2-1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= -(2-x) \\ x+1 &= -2+x \\ 1 &= -2 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions.

Le bilan est donc : il y a une unique solution $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 (Position relative — 2 points)**.** *Déterminer la position relative des courbes des fonctions* $f : x \mapsto x^2$ *et* $g : x \mapsto x+1$*, définies sur* $\mathbb{R}$*.*

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ de g en x si et seulement si $f(x) \geqslant g(x)$. Résolvons cette inéquation.

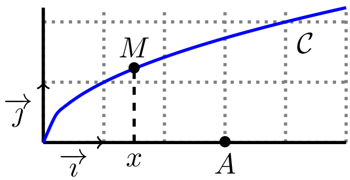
$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant g(x) \\ x^2 &\geqslant x+1 \\ x^2 - x - 1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré, dont le facteur du x^2 est positif. La fonction est donc négative entre les racines, et positive à l'extérieur. Déterminons ces racines.

Le discriminant Δ vaut $(-1)^2 - 4\times 1\times(-1) = 1+4 = 5$. Il est positif, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'équation est vérifiée pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right[$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur ce même intervalle $\left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe— 9 points)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction racine carrée, et le point A de coordonnées $(3;0)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la courbe $\mathcal{C}$ et le point A. La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.*



Pour un certain nombre x positif, on appelle M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x.

1. *Quelles sont, en fonction de x, les coordonnées de M ?* Puisque M est sur la courbe de la fonction racine carrée, le point d'abscisse x a pour ordonnée $\sqrt{x}$. Ses coordonnées sont donc $M\left(x; \sqrt{x}\right)$.
2. *Montrer que $AM = \sqrt{x^2 - 5x + 9}$.*

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x} \\ &= \sqrt{x^2 - 5x + 9} \end{aligned}$$

3. *Dans un même tableau de variations, tracer (en justifiant) :*
   (a) *les variations de la fonction $x^2 - 5x + 9$;* C'est une fonction trinôme du second degré. Le paramètre devant x^2 est positif, donc elle est décroissante jusqu'à $-\frac{-5}{2\times 1} = \frac{5}{2}$, et croissante ensuite.
   (b) *les variations de AM.* La racine carrée conserve les variations, donc les variations de AM sont les mêmes que que celles du trinômes.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x^2-5x+9		$\searrow$		$\nearrow$	
AM		$\searrow$		$\nearrow$	

4. *En déduire les coordonnées de M pour lesquelles la distance AM est minimale. Combien vaut-alors cette distance ?* On lit sur le tableau de variations que le minimum de AM est atteint en $x = \frac{5}{2}$. La distance AM vaut alors :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{x^2 - 5x + 9} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\frac{5}{2} + 9} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{36}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$