

Exercice 1 (Factorisation — 2 points). *Factoriser (si possible) le trinôme $P : x \mapsto -7x^2 - 28x - 28$. Le discriminant vaut $\Delta = (-28)^2 - 4 \times (-7) \times (-28) = 0$. Donc le trinôme a une unique racine $-\frac{-28}{2 \times (-7)} = -2$, et se factorise en $-7(x + 2)^2$.*

Exercice 2 (Changement de variable — 5 points). *L'objet de cet exercice est de trouver les solutions de l'équation $3x - 9\sqrt{x} - 12 = 0$.*

- (a) *On pose $X = \sqrt{x}$. Quelle équation doit satisfaire X ?* Puisque $X = \sqrt{x}$, alors $X^2 = \sqrt{x}^2 = x$, et l'équation devient $3X^2 - 9X - 12 = 0$.
- (b) *Montrer que les solutions de cette équation sont $X \in \{-1; 4\}$.* Le discriminant vaut $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Il est positif, donc il y a deux solutions $x_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{225}}{2 \times 3} = \frac{9 - 15}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{225}}{2 \times 3} = \frac{9 + 15}{6} = 4$. Les solutions sont donc $X = -1$ ou $X = 4$.
- (c) *En déduire les solutions de l'équation originale en x .* Puisque $X = -1$ ou $X = 4$, alors $\sqrt{x} = -1$ ou $\sqrt{x} = 4$. Le premier cas est impossible (car une racine carrée est forcément positive), donc $\sqrt{x} = 4$, c'est-à-dire que $x = 16$.

Exercice 3 (Algorithmique — 2 points). Soient a , b et c trois nombres réels ($a \neq 0$), et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Compléter l'algorithme suivant pour qu'étant donnés les trois nombres a , b et c , il affiche l'abscisse du sommet, et les variations de la fonction f .

Lire a

Lire b

Lire c

$$x_s \leftarrow -\frac{b}{2a}$$

Afficher "L'abscisse du sommet est :"

Afficher x_s

Si $a < 0$

Alors

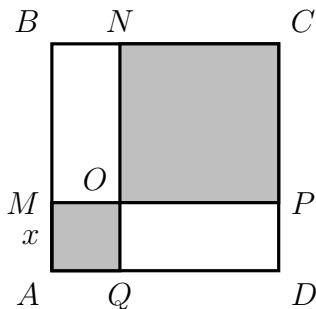
Afficher "La fonction est croissante jusqu'au sommet, puis décroissante ensuite"

Sinon

Afficher "La fonction est décroissante jusqu'au sommet, puis croissante ensuite"

FinSi

Exercice 4 (Géométrie — 6 points).



$ABCD$ est un carré de côté 6 cm ; M est un point du segment $[AB]$. On appelle x la longueur AM , en centimètres.

On construit les carrés $MAQO$ et $ONCP$ tels qu'indiqué sur la figure ci-dessus.

On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire grisée, en cm^2 , et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de x la valeur de $\mathcal{A}(x)$ est-elle supérieure à 20cm^2 ? »

- (1) Quel est le domaine de définition de \mathcal{A} ? Puisque x est la longueur AM , et que M est sur le segment $[AB]$, alors x est supérieur à 0, et ne peut pas être plus grand que la longueur AB , c'est-à-dire 6. Donc $x \in [0; 6]$.

- (2) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x^2 + (6 - x)^2$. L'aire grisée est égale à la somme des aires des deux carrés. Le carré $AM OQ$ a pour aire x^2 , et puisque $MB = 6 - x$, le carré $CNOP$ a pour aire $(6 - x)^2$. La somme des deux donne bien la formule demandée.*
- (3) *Montrer que le problème est équivalent à $2x^2 - 12x + 16 \geq 0$. On cherche les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{A}(x) \geq 20$. C'est équivalent à :*

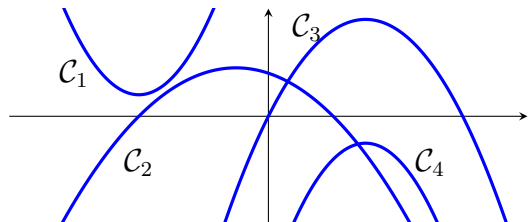
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &\geq 20 \\ x^2 + (6 - x)^2 &\geq 20 \\ x^2 + 36 - 12x + x^2 &\geq 20 \\ 2x^2 - 12x + 36 - 20 &\geq 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (4) *Résoudre le problème : Pour quelles valeurs de x a-t-on $\mathcal{A}(x) \geq 20$? Déterminons le signe du trinôme $2x^2 - 12x + 16$. Son discriminant vaut $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 16 = 144 - 128 = 16 = 4^2$. Le trinôme a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{12 - 4}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{12 + 4}{4} = 4$.*

De plus, puisque le facteur devant le x^2 est positif, le trinôme est négatif entre les racines, et positif à l'extérieur. Donc les solutions sont $x \in [0; 2] \cup [4; 6]$.

Exercice 5 (Interprétation géométrique — 5 points). *Voici l'expression de quatre trinômes, et leurs représentations graphiques. Malheureusement, les courbes ne sont pas légendées, et les axes ne sont pas gradués. Malgré cela, en justifiant sans la calculatrice, associer chaque expression à sa représentation graphique.*

- $P : x \mapsto -2x^2 + 6x$
- $Q : x \mapsto -x^2 - x + 2$
- $R : x \mapsto 3x^2 + 12x + 15$
- $S : x \mapsto -3x^2 + 9x - 8$



Plusieurs arguments permettent de conclure. Je donne ici trop d'arguments, pour montrer toutes les manières de faire.

- \mathcal{C}_1 est la seule courbe décroissante puis croissante. Nécessairement, sa fonction est la seule dont le facteur devant x^2 est positif. C'est donc R .
- On peut départager les trois autres courbes en notant que l'ordonnée à l'origine (point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées) de \mathcal{C}_2 est strictement positive, celle de \mathcal{C}_3 est nulle, celle de \mathcal{C}_4 est négative. Donc les fonctions Q , P , S correspondent respectivement aux courbes \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , et \mathcal{C}_4 .
- Puisque R a déjà été attribuées, on calcule le discriminant des autres fonctions, et on voit que seul le discriminant de S est négatif. Il s'agit donc de la courbe \mathcal{C}_4 , qui n'a aucune racine (aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses). Restent les deux autres courbes : L'abscisse du sommet de la parabole de \mathcal{C}_2 est négatif; celui de \mathcal{C}_3 est positif. Donc, en calculant l'abscisse du sommet des paraboles des fonctions P et Q (avec la formule $-\frac{b}{2a}$), on peut attribuer P à \mathcal{C}_3 et Q à \mathcal{C}_4 .