07/10/15
DS n° 1

Trinômes du second degré — Sujet A

$1^{e}S6$

Exercice 1 (Factorisation — 2 points)**.** *Factoriser (si possible) le polynôme $P : x \mapsto 5x^2 - 20x + 20$.* Le discriminant vaut $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 20 = 0$. Donc le trinôme a une unique racine $-\frac{-20}{2\times 5} = 2$, et se factorise en $5\,(x-2)^2$.

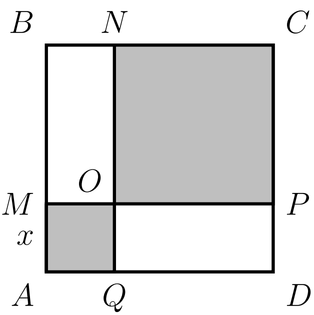
Exercice 2 (Changement de variable — 5 points)**.** *L'objet de cet exercice est de trouver les solutions de l'équation $3x + 9\sqrt{x} - 12 = 0$.*

(a) *On pose $X = \sqrt{x}$. Quelle équation doit satisfaire X ?* Puisque $X = \sqrt{x}$, alors $X^2 = \sqrt{x}^2 = x$, et l'équation devient $3X^2 + 9X - 12 = 0$.

(b) *Montrer que les solutions de cette équation sont $X \in \{-4; 1\}$.* Le discriminant vaut $\Delta = 9^2 - 4\times 3\times(-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Il est positif, donc il y a deux solutions $x_1 = \frac{-9-\sqrt{225}}{2\times 3} = \frac{-9-15}{6} = -4$ et $x_1 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\times 3} = \frac{-9+15}{6} = 1$. Les solutions sont donc $X = -4$ ou $X = 1$.

(c) *En déduire les solutions de l'équation originale en x.* Puisque $X = -4$ ou $X = 1$, alors $\sqrt{x} = -4$ ou $\sqrt{x} = 1$. Le premier cas est impossible (car une racine carrée est forcément positive), donc $\sqrt{x} = 1$, c'est-à-dire que $x = 1$.

Exercice 3 (Géométrie — 6 points)**.**



$ABCD$ est un carré de côté 5 cm ; M est un point du segment $[AB]$. On appelle x la longueur AM, en centimètres.

On construit les carrés $MAQO$ et $ONCP$ tels qu'indiqué sur la figure ci-dessus.

On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire grisée, en cm², et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de x la valeur de $\mathcal{A}(x)$ est-elle supérieure à 17 cm² ? »

(1) *Quel est le domaine de définition de $\mathcal{A}$?* Puisque x est la longueur AM, et que M est sur le segment $[AB]$, alors x est supérieur à 0, et ne peut pas être plus grand que la langueur AB, c'est-à-dire 5. Donc $x \in [0; 5]$.

(2) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x^2 + (5-x)^2$.* L'aire grisée est égale à la somme des aires des deux carrés. Le carré $AMOQ$ a pour aire x^2, et puisque $MB = 5 - x$, le carré $CNOP$ a pour aire $(5-x)^2$. La somme des deux donne bien la formule demandée.

(3) *Montrer que le problème est équivalent à $2x^2 - 10x + 8 \geqslant 0$.* On cherche les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{A}(x) \geqslant 17$. C'est équivalent à :

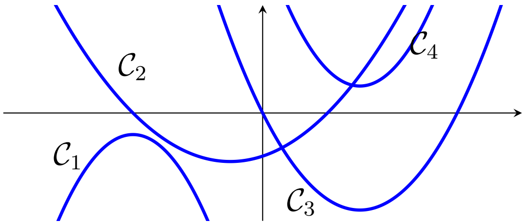
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &\geqslant 17 \\ x^2 + (5-x)^2 &\geqslant 17 \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 &\geqslant 17 \\ 2x^2 - 10x + 25 - 17 &\geqslant 0 \\ 2x^2 - 10x + 8 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(4) *Résoudre le problème : Pour quelles valeurs de x a-t-on $\mathcal{A}(x) \geqslant 17$?* Déterminons le signe du trinôme $2x^2 - 10x + 8$. Son discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36 = 6^2$. Le trinôme a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{36}}{2\times 2} = \frac{10-6}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-10)+\sqrt{36}}{2\times 2} = \frac{10+6}{4} = 4$.
De plus, puisque le facteur devant le x^2 est positif, le trinôme est négatif entre les racines, et positif à l'extérieur. Donc les solutions sont $x \in [0; 1] \cup [4; 5]$.

Exercice 4 (Interprétation géométrique — 5 points)**.** *Voici l'expression de quatre trinômes, et leurs représentations graphiques. Malheureusement, les courbes ne sont pas légendées, et les axes ne sont pas gradués. Malgré cela,* en justifiant sans la calculatrice, *associer chaque expression à sa représentation graphique.*

Indiquer le nom des fonctions sur le graphique, et justifier ce choix sur votre copie.

- $P : x \mapsto 2x^2 - 6x$
- $Q : x \mapsto x^2 + x - 2$
- $R : x \mapsto -3x^2 - 12x - 15$
- $S : x \mapsto 3x^2 - 9x + 8$



Plusieurs arguments permettent de conclure. Je donne ici trop d'arguments, pour montrer toutes les manières de faire.

— $\mathcal{C}_1$ est la seule courbe croissante puis décroissante. Nécessairement, sa fonction est la seule dont le facteur devant x^2 est négatif. C'est donc R.

— On peut départager les trois autres courbes en notant que l'ordonnée à l'origine (point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées) de $\mathcal{C}_4$ est strictement positive, celle de $\mathcal{C}_3$ est nulle, celle de $\mathcal{C}_2$ est négative. Donc les fonctions S, P, Q correspondent respectivement aux courbes $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_3$, et $\mathcal{C}_2$.

— Puisque R a déjà été attribuées, on calcule le discriminant des autres fonctions, et on voit que seul le discriminant de S est négatif. Il s'agit donc de la courbe $\mathcal{C}_4$, qui n'a aucune racine (aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses). Restent les deux autres courbes : L'abscisse du sommet de la parabole de $\mathcal{C}_2$ est négatif ; celui de $\mathcal{C}_3$ est positif. Donc, en calculant l'abscisse du sommet des paraboles des fonctions P et Q (avec la formule $-\frac{b}{2a}$), on peut attribuer P à $\mathcal{C}_3$ et Q à $\mathcal{C}_2$.

Exercice 5 (Algorithmique — 2 points)**.** *Soient a, b et c trois nombres réels ($a \neq 0$), et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.*

Compléter l'algorithme suivant pour qu'étant donnés les trois nombres a, b et c, il affiche l'abscisse du sommet, et les variations de la fonction f.

```
Lire a
Lire b
Lire c

x_s ← -b/(2a)

Afficher "L'abscisse du sommet est :"
Afficher x_s

Si a > 0
Alors
   Afficher "La fonction est decroissante jusqu'au
            sommet, puis croissante ensuite"
Sinon
   Afficher "La fonction est croissante jusqu'au
            sommet, puis decroissante ensuite"
FinSi
```
