19/05/2016 **Équations cartésiennes** *1e S6*

DM no 8

Faire un des deux exercices 1 et 2 au choix (de préférence le 2, plus difficile). L'exercice 3 est obligatoire.

Exercice 1 (Droite et Cercle)**.** On se place dans une repère orthonormé.

On considère la droite d passant par $A\left(6;6\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\left(2;2\right)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\left(3;2\right)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

1. Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $\left(x-3\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 5^2$.

Soit $M\left(x;y\right)$ un point appartenant à la fois à d et $\mathcal{C}$.

2. Montrer que x vérifie $\left(x-3\right)^2 + \left(10-x\right)^2 = 25$.
3. En déduire que x vérifie $x^2 - 13x + 42 = 0$.
4. En déduire les valeurs possibles de x.
5. En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

Exercice 2 (Droite et Cercle)**.** On se place dans un repère orthonormé.

Étant donné un nombre réel α, on considère la droite d_α passant par $A\left(\alpha;\alpha\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\left(3;3\right)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\left(3;2\right)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et $\mathcal{C}$, en fonction de α.

1. Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $\left(x-3\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 5^2$.

Soit $M(x;y)$ un point appartenant à la fois à d_α et $\mathcal{C}$.

2. Montrer que x vérifie $(x-3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 = 25$, puis que x vérifie $x^2 - (1+2\alpha)\,x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$.

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y, le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ est égal au nombre de solutions de cette équation du second degré en x, et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ.

3. Montrer que $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$.
4. Montrer que le signe de Δ, en fonction de α, est :

α	$-\infty$		$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$		$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ en fonction de α.

Exercice 3 (Culture générale)**.** Citer une œuvre d'art mathématique, c'est-à-dire :

— donner son titre (si elle en a un), le nom de l'auteur, la date de création ;

— si c'est un texte, recopier ou imprimer l'œuvre ou un extrait ; si c'est une œuvre plastique, en imprimer une photographie ; si c'est une musique, me l'envoyer par courriel (ou un lien vers celle-ci) ; etc.