

Exercice 1 (Droite et Cercle). *On se place dans une repère orthonormé.*

On considère la droite d passant par $A(6; 6)$ et de vecteur normal $\vec{u}(2; 2)$, et le cercle \mathcal{C} de centre $B(3; 2)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et \mathcal{C} .

1. *Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.*

Droite Soit $M(x, y)$ un point quelconque de d . Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (x - 6) \times 2 + (y - 6) \times 2 &= 0 \\ 2x - 12 + 2y - 12 &= 0 \\ 2y &= 24 - 2x \\ y &= 12 - x\end{aligned}$$

Cercle Soit M un point du cercle de centre $B(3; 2)$ et de rayon 5. Alors la distance BM vaut 5, et :

$$\begin{aligned}BM^2 &= 25 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Soit $M(x; y)$ un point appartenant à la fois à d et \mathcal{C} .

2. Montrer que x vérifie $(x - 3)^2 + (10 - x)^2 = 25$. Puisque M appartient \mathcal{C} , ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation \mathcal{C} , et $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Mais M est dans d également, donc $y = 12 - x$. Utilisé dans l'équation précédente, cela donne :

$$(x - 3)^2 + (12 - x - 2)^2 = 25$$

$$(x - 3)^2 + (10 - x)^2 = 25$$

3. En déduire que x vérifie $x^2 - 13x + 42 = 0$. En partant de l'équation précédente, on a :

$$(x - 3)^2 + (10 - x)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + 100 - 20x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 26x + 84 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

4. En déduire les valeurs possibles de x . Nous obtenons un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 42 = 1$. Il est positif, donc il y a deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 6$ et $x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 7$.

5. En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et \mathcal{C} . Puisque $y = 12 - x$, et que $x = 6$ ou $x = 7$, nous obtenons deux points d'intersection, de coordonnées respectives $\binom{6}{12-6}$ soit $\binom{6}{6}$ d'une part, et $\binom{7}{12-7}$ soit $\binom{7}{5}$ d'autre part.

Exercice 2 (Droite et Cercle). On se place dans un repère orthonormé.

Étant donné un nombre réel α , on considère la droite d_α passant par $A(\alpha; \alpha)$ et de vecteur normal $\vec{u}(3; 3)$, et le cercle \mathcal{C} de centre $B(3; 2)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et \mathcal{C} , en fonction de α .

1. Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

Droite Soit $M(x; y)$ un point quelconque de d_α . Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\alpha \end{pmatrix}$ et \overrightarrow{u} sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} &= 0 \\ (x - \alpha) \times 2 + (y - \alpha) \times 2 &= 0 \\ 2x - 2\alpha + 2y - 2\alpha &= 0 \\ 2y &= 4\alpha - 2x \\ y &= 2\alpha - x \end{aligned}$$

Cercle Voir la démonstration à la question 1 de l'exercice 1.

Soit $M(x; y)$ un point appartenant à la fois à d_α et \mathcal{C} .

2. Montrer que x vérifie $(x - 3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 = 25$, puis que x vérifie $x^2 - (1 + 2\alpha)x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$. Puisque M est un point du cercle, alors $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. D'autre part, puisque M est un point de la droite, alors $y = 2\alpha - x$. Donc :

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 &= 25 \\ (x - 3)^2 + (2\alpha - 2 - x)^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + (2\alpha - 2)^2 - 2(2\alpha - 2)x + x^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + (4 - 4\alpha)x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 + (4 - 4\alpha - 6)x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 25 &= 0 \\ 2x^2 - (2 + 4\alpha)x + 4\alpha^2 - 12 - 8\alpha &= 0 \\ x^2 - (1 + 2\alpha)x + 2\alpha^2 - 6 - 4\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y , le nombre de points d'intersection de d_α et \mathcal{C} est égal au nombre de solutions de cette équation du second degré en x , et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ .

3. Montrer que $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$.

$$\begin{aligned}\Delta &= -(1 + 2\alpha)^2 - 4 \times 1 \times (2\alpha^2 - 6 - 4\alpha) \\ &= 1 + 4\alpha + 4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 24 + 16\alpha \\ &= -4\alpha^2 + 20\alpha + 25\end{aligned}$$

4. Montrer que le signe de Δ , en fonction de α , est :

α	$-\infty$	$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
Δ	-	0	+	0	-

Nous obtenons un trinôme du second degré en α , de discriminant $20^4 - 4 \times (-4) \times 25 = 800 = 2 \times 20^2$. Il est positif, donc le trinôme a deux racines $\alpha_2 = \frac{-20 - \sqrt{2 \times 20^2}}{2 \times -4} = \frac{-20 - 20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha_1 = \frac{-20 + \sqrt{2 \times 20^2}}{2 \times -4} = \frac{-20 + 20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2}$. Nous obtenons donc le tableau de signes demandé.

5. En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et \mathcal{C} en fonction de α . Trois cas sont possibles :

- si $\alpha \in]\alpha_1; \alpha_2[$, alors Δ est strictement positif, le trinôme en x a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection ;
- si $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$, alors Δ est nul, le trinôme en x a une seule solution, et la droite et le cercle ont un seul point d'intersection (dans ce cas, la droite est tangente au cercle) ;

— enfin, si $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$, alors Δ est strictement négatif, le trinôme en x n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun points d'intersections (la droite est extérieure au cercle).