

Exercice 1 (Pyramide).



1. Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure de gauche (chaque étage contient deux fois plus de cubes que l'étage du dessus). On appelle u_n le nombre de cubes du n^e étage (en commençant par le haut : $u_1 = 1$).

(a) Donner les trois premiers termes de la suite u . $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$.

(b) Quelle est la nature de u ? Donner alors ses caractéristiques. Chaque étage contient deux fois plus de cubes que le précédent, donc c'est une suite géométrique de raison 2, et de premier terme 1.

(c) Calculer u_{10} . Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.

Le 10^e terme u_{10} est égal à $1 \times 2^{10-1} = 512$.

La somme des dix premiers termes est premier terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

$$1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023.$$

(d) Elle dispose de 1000 cubes et construit la plus grande pyramide possible. Combien d'étage y aura-t-il ? Combien de cubes seront utilisés ? Dix étages nécessitent 1023 cubes, ce qui est trop. Neuf étages nécessitent $1 \times \frac{1-2^9}{1-2} = 511$ cubes. C'est donc le nombre d'étage maximum de la pyramide, composée de 511 cubes.

2. Trouvant sa pyramide trop petite, elle recommence en prenant cette fois le modèle de droite (chaque étage contient deux cubes de plus que l'étage du dessus). On appelle v_n le nombre de cubes du n^e étage (en commençant par le haut : $v_1 = 1$).

- (a) Donner les trois premiers termes de la suite v . $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$.
- (b) Quelle est la nature de v ? Donner alors ses caractéristiques. Chaque terme de la suite est égal au précédent auquel on ajoute deux. La suite est donc arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
- (c) Calculer v_{10} . Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.

Le 10^e terme v_{10} est égal à $1 + 2 \times (10 - 1) = 19$.

La somme des 10 premiers termes est $10 \times \frac{v_1 + v_{10}}{2} = 10 \times \frac{1 + 19}{2} = 100$.

- (d) Elle dispose de 1000 cubes et construit la plus grande pyramide possible. Combien d'étage y aura-t-il ? Combien de cubes seront utilisés ? Soit n le nombre d'étages. Sa pyramide est composée de $n \times \frac{v_1 + v_n}{2} = n \times \frac{1 + 1 + 2(n-1)}{2} = n^2$. On cherche donc la plus grande valeur entière de n telle que $n^2 \leq 1000$, c'est-à-dire $n \leq \sqrt{1000}$, ou $n \leq 31,7$. Donc $n = 31$.

La pyramide contient alors $31 \times \frac{1 + 1 + 2 \times (31 - 1)}{2}$ cubes, soit 961 cubes.

Exercice 2 (Crédit à la consommation). Une personne rencontrant des difficultés financières qu'elle considère passagère contracte un crédit à la consommation. L'objet de l'exercice est de déterminer (i) quelle va être la durée de son prêt ; (ii) quelle sera la somme totale remboursée.

Cette personne a emprunté 10 000 €. Chaque mois, sa dette augmente de 1 % (intérêts), et elle rembourse 300 euros.

On appelle u_n la suite définie sur \mathbb{N} par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme d'argent à rembourser à la fin du n^{e} mois. Ainsi $u_0 = 10000$; u_1 est cette somme à laquelle s'ajoute 1 % d'intérêts, et à laquelle on soustrait 300, etc.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 1,01u_n - 300$.

Soit u_n la somme à rembourser à la fin d'un certain mois n . Au mois suivant, les intérêts s'élèvent à 1 %, soit $0,01u_n$, et la personne rembourse 300 €. Donc $u_{n+1} = u_n + 0,01u_n - 300 = 1,01u_n - 300$.

2. Étude préliminaire de u

(a) Calculer u_1, u_2, u_3 . $u_1 = 1,01 \times 10000 - 300 = 9800$; $u_2 = 1,01 \times 9800 - 300 = 9598$; $u_3 = 1,01 \times 9598 - 300 = 9393,98$.

(b) La suite u est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

- $u_1 - u_0 = -200$ mais $u_2 - u_1 = -202$, donc la suite n'est pas arithmétique.
- $\frac{u_1}{u_0} = 0,98$ mais $\frac{u_2}{u_1} \approx 0,979$, donc la suite n'est pas géométrique.

3. Suite auxiliaire : Soit v la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n = u_n - 30000$.

(a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .

$v_0 = u_0 - 30000 = 10000 - 30000 = -20000$; $v_1 = -20200$;
 $v_2 = -20402$; $v_3 = -20606,02$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = 1,01v_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 30000 \\
 &= 1,01u_n - 300 - 30000 \\
 &= 1,01u_n - 0,01 \times 30000 - 30000 \\
 &= 1,01u_n - 1,01 \times 30000 \\
 &= 1,01(u_n - 30000) \\
 &= 1,01v_n
 \end{aligned}$$

- (c) *En déduire la nature de la suite v , ainsi que ses caractéristiques. Donner alors le terme général de v_n , puis calculer v_{24} . Donc la suite v est une suite géométrique de raison $1,01$, et de premier terme $v_0 = -20000$. Son terme général est $v_n = -20000 \times 1,01^n$, et $v_{24} = -20000 \times 1,01^{24} \approx -25394,29$.*

4. Étude de u .

- (a) *En utilisant la question précédente, et la relation entre u et v définie à la question 3, déterminer le terme général de la suite u . Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 30000$, alors $u_n = v_n + 30000$. D'autre part, $v_n = -20000 \times 1,01^n$. Donc $u_n = -20000 \times 1,01^n + 30000$.*
- (b) *Calculer u_{24} , et en déduire la somme d'argent qu'il reste à rembourser au bout de deux ans. $u_{24} = -20000 \times 1,01^{24} + 30000 \approx 4605,31$. Il restera donc, au bout de deux ans, $4605,31$ € à rembourser.*
- (c) *À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n \leq 0$? Puisque vous n'avez pas encore les outils pour résoudre « proprement » ce type de question, il faut faire cela en tatonnant (essayer plusieurs valeurs de n jusqu'à trouver la bonne). On trouve : $u_{41} \approx -75,05$ (et $u_{40} > 0$).*

5. Remboursement.

- (a) *En déduire combien de temps sera nécessaire au remboursement complet du prêt. Il faudra donc 41 mois, soit trois ans et cinq mois pour rembourser le prêt.*
- (b) *Quel sera alors le montant total des intérêts (en d'autres termes, combien d'argent aura été remboursé en plus des 10 000 € empruntés) ? Chaque mois (sauf le dernier) 300 € ont été versés à la banque. Le dernier mois, le dernier versement a été de 222,73 € (car $u_{40} \approx 222,73$). La somme totale versée à la banque est donc $300 \times 40 + 222,73 = 12222,73$. La somme versée en plus de la somme empruntée est donc $12222,73 - 10000 = 2222,73$ €.*