Exercice 1 (Jeu infini)**.** Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.

Par exemple : un joueur lance le dé et obtient 1 : il gagne un bonbon et rejoue. Il fait à nouveau 1 : il gagne un second bonbon. Il relance le dé et obtient 3 : il gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Il a gagné au total 5 bonbons.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.

On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1 + E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1 + E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

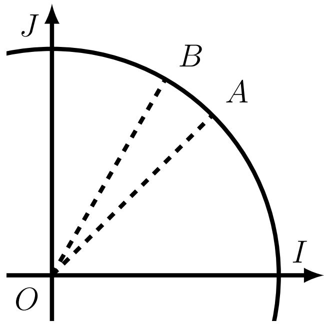
1. Dresser la loi de probabilité de X.
2. En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que $E(X) = \frac{21+E(X)}{6}$.
3. Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que *si l'espérance $E(X)$ existe*, elle est égale à cette valeur.

4. Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que le calcul précédent ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques. En d'autres termes : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?

Exercice 2 (Valeurs remarquables)**.** Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A et B, tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$.



1. (a) Rappeler les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, et $\sin\frac{\pi}{3}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de A et B.
   (c) En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire, montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.
2. (a) Démontrer, de manière aussi rigoureuse que possible, que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{12}$.
   (b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{12}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (Culture)**.** Donner un exemple de problème ou conjecture non-résolu en mathématiques, dont vous comprenez (si possible) l'énoncé.