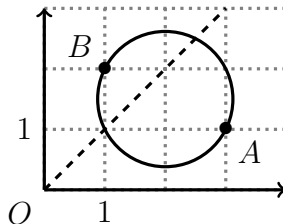


Exercice 1 (Lieu géométrique).

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3; 1)$ et $B(1; 2)$, le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, et la droite \mathcal{D} , d'équation $y = x$.



L'objet de l'exercice est de déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} . On appelle $M(x; y)$ ces points, et on admet que M n'est ni A ni B .

1. Étude du cercle \mathcal{C} .

- Justifier que l'angle \widehat{AMB} est droit. Puisque AMB est un triangle dont le cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$, alors il est rectangle en M , et l'angle \widehat{AMB} est droit.
- En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. L'angle \widehat{AMB} est droit, donc les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul.
- Montrer que $(x - 3)(x - 1) + (y - 1)(y - 2) = 0$. Les coordonnées des vecteurs sont respectivement $\overrightarrow{AM}(x - 3; y - 1)$ et $\overrightarrow{BM}(x - 1; y - 2)$. Le repère est orthonormé, donc leur produit scalaire est donné par la formule $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - 3)(x - 1) + (y - 1)(y - 2)$. Puisque le produit scalaire est nul, alors $(x - 3)(x - 1) + (y - 1)(y - 2) = 0$.

2. Puisque $M \in \mathcal{D}$, en déduire que $(x - 1)(2x - 5) = 0$. Le point M est sur la droite \mathcal{D} , donc $y = x$. En reprenant l'équation de la question précédente, nous avons :

$$(x - 3)(x - 1) + (y - 1)(y - 2) = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$(x - 1)[(x - 3) + (x - 2)] = 0$$

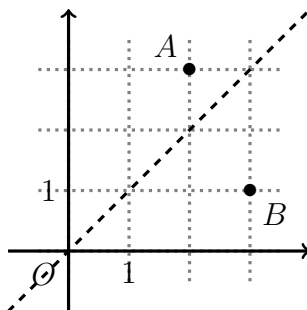
$$(x - 1)(x - 3 + x - 2) = 0$$

$$(x - 1)(2x - 5) = 0$$

3. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et de \mathcal{D} . Les coordonnées du point M vérifient $(x - 1)(2x - 5) = 0$. C'est une équation produit, équivalente à $x - 1 = 0$ ou $2x - 5 = 0$. Les solutions sont donc $x = 1$ ou $x = 2,5$. Puisque $x = y$, les coordonnées possibles de M sont donc $(1; 1)$ et $(2,5; 2,5)$.

Exercice 2 (Lieu géométrique).

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2; 3)$, et $B(3; 1)$. On appelle $M(x; y)$ un point de la droite d'équation $y = x$.



- Justifier que les coordonnées de M sont $(x; x)$. Puisque M est sur la droite d'équation $y = x$, alors $y = x$.
- Exprimer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} en fonction de x , puis montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - 3)(2x - 3)$.

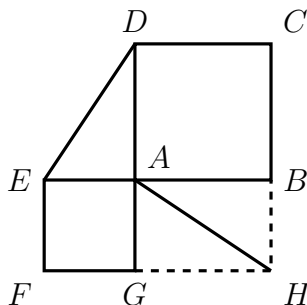
Les coordonnées des vecteurs sont $\overrightarrow{AM}(x-2; y-3)$ et $\overrightarrow{BM}(x-3; y-1)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} &= (x-2)(x-3) + (y-3)(y-1) \\ &= (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) \\ &= (x-3)[(x-2) + (x-1)] \\ &= (x-3)(x-2+x-1) \\ &= (x-3)(2x-3)\end{aligned}$$

3. Résoudre $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. D'après la question précédente, cette équation est équivalente à $(x-3)(2x-3) = 0$. C'est une équation produit, elle-même équivalente à $x-3 = 0$ ou $2x-3 = 0$. Donc les solutions sont $\{3; 1,5\}$.
4. En déduire les coordonnées possibles de M pour lesquelles les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires. Si M est égal à A ou B , alors l'une des deux droites (AM) ou (BM) n'est pas définie. Donc M est différent de A et B . De plus, puisque les deux droites sont perpendiculaires, alors les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. Nous avons montré que cette équation est équivalente à $x = 3$ ou $x = 1,5$, donc l'abscisse de M est 3 ou 1,5. Enfin, puisque M est sur la droite d'équation $y = x$, alors les coordonnées possibles de M , point d'intersection des deux droites (AM) et (BM) sont $(1,5; 1,5)$ et $(3; 3)$.

Exercice 3 (Perpendicularité).

On considère la figure ci-contre. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés, et $ABHG$ est un rectangle.



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.

1. En introduisant respectivement les points A et B dans les vecteurs \overrightarrow{ED} et \overrightarrow{AH} , montrer que $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} \end{aligned}$$

Or les vecteurs \overrightarrow{EA} et \overrightarrow{BH} sont orthogonaux (car (BH) est parallèle à (AG) , elle-même perpendiculaire à (EA)), donc leur produit scalaire est nul, de même que \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AB} . Donc il ne reste plus que $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$. Puisque les vecteurs \overrightarrow{EA} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires de même sens, leur produit scalaire est égal à $EA \times AB$. De même, les vecteurs \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires de sens contraire, donc leur produit scalaire est égal à $-BH \times AD$. Mais $BH = EA$ et $AD = AB$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = -EA \times AB$. Donc $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} = EA \times AB - EA \times AB = 0$.
3. En déduire que (ED) et (AH) sont perpendiculaires. Le produit scalaire $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH}$ est nul, donc les vecteurs (qui sont non nuls) \overrightarrow{ED} et \overrightarrow{AH} sont orthogonaux, et les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.