07/01/16
DM n^o 4

DÉRIVATION

1^e S6

Exercice 1 (Calcul de fonction dérivées).

1. *On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.*

   (a) *Montrer que pour un réel h non nul, le taux d'accroissement en a est égal à $2a+h$.* Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h\end{aligned}$$

   (b) *En déduire la valeur de $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (en fonction de a), et donc la valeur de $f'(a)$.* Lorsque h tend vers 0, $2a+h$ tend vers $2a$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$. Nous avons montré que $f'(a) = 2a$.

   (c) Application : *Calculer $f'(2)$, et tracer dans un repère orthonormé la courbe de f (sur l'intervalle $[0;4]$), ainsi que sa tangente en 2.* Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 2 \times 2 = 4$. Voir le graphique à la fin.

2. *On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, et a un réel non nul.*

   (a) *Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a+h \neq 0$),* *le taux d'accroissement en a est égal à* $-\frac{1}{a(a+h)}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{-h}{a\left(a+h\right)}\times\frac{1}{h}\\ &= -\frac{1}{a\left(a+h\right)}\end{aligned}$$

(b) *Même énoncé que la question 1b.* Lorsque h tend vers 0, $a+h$ tend vers a, donc $-\frac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$. Donc $f'\left(a\right)=-\frac{1}{a^2}$.

(c) *Même énoncé que la question 1c.* Le nombre dérivé de f en 2 est : $f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$. Voir le graphique à la fin.

3. *On considère la fonction* $f:x\mapsto\sqrt{x}$*, définie sur* $\mathbb{R}^+$*, et a un réel strictement positif.*

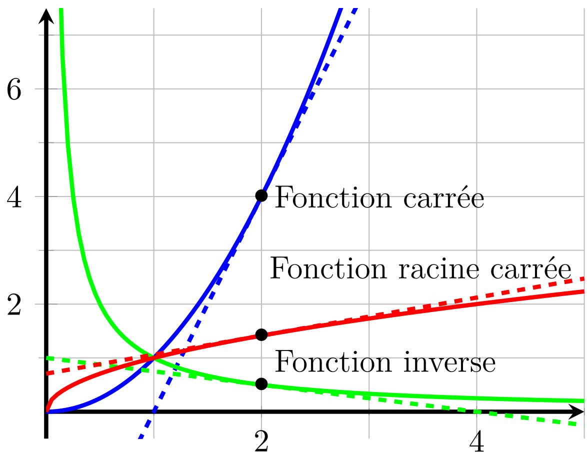
   (a) *Montrer que pour un réel h non nul (et tel que* $a+h\geq 0$*), le taux d'accroissement en a est égal à* $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$.

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

(b) *Même énoncé que la question 1b.* Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

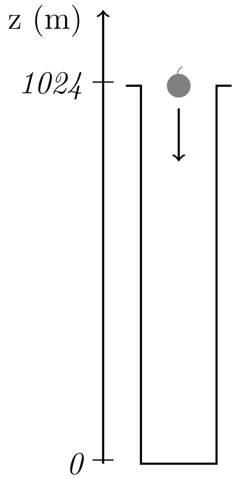
(c) *Même énoncé que la question 1c.* Le nombre dérivé de f en 2 vaut : $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,35$. Voir le graphique ci-dessous.



Exercice 2 (Application à la physique)**.**

Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de $1\,024$ m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et $1\,024$ m en haut.



Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.

(1) *Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$.* Au départ, la pomme est au sommet du puit, donc $z(0) = 1024$. En utilisant l'expression de z, on trouve que $z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 1024$.

(2) *La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.*

   (a) *Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.* Puisque z est un polynôme, on a : $z'(t) = 2at + b$. Donc $v(t) = z'(t) = 2at + b$.

   (b) *Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$.* La pomme est lâchée du sommet, donc $v(0) = 0$. Or $v(0) = 2a \times 0 + b = b$. Donc $b = 0$.

(c) *Exprimer z et v en fonction de a et t.* Donc :

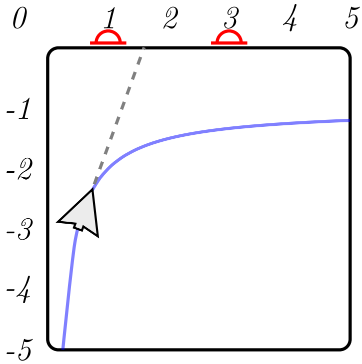
$$v\left(t\right) = 2at$$
$$z\left(t\right) = at^2 + 1024$$

(3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5* s. *Traduire cette information par une équation, et montrer que* $a = -4,87$. La chute s'arrête lorsque la pomme atteint le fond du puits, c'est-à-dire quand $z\left(t\right) = 0$. Donc, $z(14,5) = 0$, et $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$. Donc $a = -\frac{1024}{14{,}5^2} \approx -4,87$.

(4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g.* La dérivée de v est $v'\left(t\right) = 2a \approx 2 \times (-4,87) \approx -9,74$. Donc $-g \approx -9,74$, et $g = 9,74$.

Exercice 3 (Tangente et Jeu vidéo)**.** *La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation* $y = -1 - \dfrac{1}{x}$

L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



En quels points de sa trajectoire l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les deux monstres situés en haut de l'écran en $A\binom{1}{0}, B\binom{3}{0}$ *?*

Pour une abscisse a donnée, l'avion tire un missile selon la tangente à sa trajectoire. Donc la trajectoire du missile a pour équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ (où f est la fonction représentant la trajectoire de l'avion). Il faut donc calculer la dérivée de f. Puisque la dérivée d'une constante est nulle, on a : $f'\,(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$.

L'équation de la tangente est donc :

$$\begin{aligned}
&y = f'(a)(x-a) + f(a)\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{1}{a^2}\,(x-a) - 1 - \frac{1}{a}\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{x-a}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{a^2}\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{x-a-a^2-a}{a^2}\\
\Leftrightarrow\ &y = \frac{-a^2-2a+x}{a^2}
\end{aligned}$$

Supposons que le missile, lancé depuis l'avion au point d'abscisse a, atteigne le monstre en $A\binom{1}{0}$. Cela signifie que ce monstre est sur sa trajectoire, c'est-à-dire que le point appartient à la tangente à la trajectoire de l'avion. C'est-à-dire :

$$0 = \frac{-a^2 - 2a + 1}{a^2}$$

Puisque a est strictement positif (la trajectoire de l'avion n'est définie que pour $a > 0$), l'équation est équivalente à

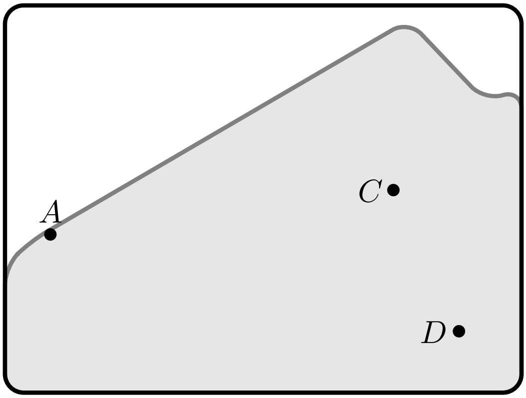
$$0 = -a^2 - 2a + 1$$

C'est un trinôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$. Il est positif, donc l'équation a deux solutions $a_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times-1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2} - 1$ et $a_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times-1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2} - 1$. Or cette dernière valeur est négative, donc exclue. Il n'y a donc qu'une seule solution $a_1 = \sqrt{2} - 1$.

Pour toucher le premier monstre, l'avion doit donc avoir comme abscisse $\sqrt{2} - 1$, et comme ordonnée $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (que l'on peut simplifier en $-2 - \sqrt{2}$).

De même, en appliquant le même raisonnement au second monstre, on trouve que l'avion doit être en $\binom{1}{-2}$ pour l'atteindre.

Exercice 4 (Droites et Jeu vidéo)**.** *Chaïma joue au jeu vidéo* Well Well Well Drilling. *Son personnage, situé sur le flanc d'une montagne, doit forer des puits, en ligne droite, afin d'exploiter différentes ressources.*



Sur son écran représenté ci-dessus, le flanc de la montagne est principalement constitué d'une pente rectiligne passant par $A\,(90;312)$ *et de pente 60 %. Un filon de coltan est situé en* $C\,(770;400)$ *et un autre de diamant en* $D\,(900,120)$ *(le repère considéré a pour origine le coin inférieur gauche de l'écran, les axes sont les bords inférieur et gauche de l'écran, et l'unité est le pixel).*

Pour obtenir le trophée « Foreuse économe », Chaïma doit, en un seul forage, traverser à la fois le filon de coltan et celui de diamant. Quelles sont alors les coordonnées du point à partir duquel son personnage doit forer, et quel angle doit former le puits avec l'horizontale ?

Appelons F le point où Chaïma doit forer. Ce point doit être à la fois sur le plan de la montagne, et aligné avec C et D (c'est-à-dire sur la droite (CD)).

Équation du flanc de la montagne. Commençons par déteminer l'équation du flanc de la montagne : c'est une droite, donc de la forme $y = mx + p$. Nous savons que la pente est 60 %, donc $y = 0,6x+p$. Enfin, nous savons que le point $A\,(90;312)$ appartient à cette droite, donc $312 = 0,6 \times 90 + p$. En résolvant cette équation, nous trouvons $p = 258$. L'équation est donc $\boxed{y = 0,6x + 258}$.

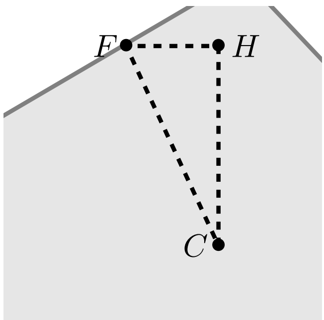
Équation de (CD). Déterminons l'équation de (CD). Son coefficient directeur vaut $\frac{y_D - y_C}{x_D - y_C} = \frac{120-400}{900-770} = -\frac{28}{13}$. L'équation de la droite est donc de la forme $y = -\frac{28}{13}x + p$. De plus, puisque D est sur cette droite, ses coordonnées vérifient l'équation, donc $120 = 900 \times -\frac{28}{13} + p$, ce qui nous donne $p = \frac{26760}{13}$. L'équation de la droite est donc $\boxed{y = -\frac{28}{13}x + \frac{26760}{13}}$.

Recherche des coordonnées de F. Puisque F est sur le flanc de la montagne, et sur la droite (CD), ses coordonnées vérifient les deux équations.

$$\begin{cases} y & = 0,6x + 258 \\ y & = -\frac{28}{13}x + \frac{26760}{13} \end{cases}$$

Une fois ce système résolu, nous obtenons environ : $F(654; 650)$. Reste à déterminer l'angle auquel forer.

Calcul de l'angle. En zoomant sur la partie qui nous intéresse, nous obtenons ceci.



Ajoutons un point H à la verticule de C et à l'horizontale de F. Ses coordonnées sont donc $H(770; 650)$ (la même abscisse que C, et la même ordonnée que F). Puisque l'angle qui nous intéresse est l'angle de (FC) par rapport à l'horizontale, c'est la mesure de l'angle $\widehat{HFC}$ que nous voulons calculer. Un peu de trigonométrie dans le triangle FHC, rectangle en H, va nous donner la solution.

$$\begin{aligned}
\tan \widehat{HFC} &= \frac{HC}{FH} \\
\widehat{HFC} &= \arctan \frac{HC}{FH} \\
\widehat{HFC} &= \arctan \frac{650 - 400}{770 - 654} \\
\widehat{HFC} &\approx 65^\circ
\end{aligned}$$

Conclusion. Il faut forer à partir du point $F(654, 650)$, avec un angle d'environ 65° (vers le bas) avec l'horizontale.