05/11/15
DM nº 2

Généralités sur les fonctions

1ᵉS6

Exercice 1 (Fonction cube)**.** On appelle *fonction cube* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

(a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

(b) *Premier cas : a et b sont de signes opposés.* Justifier que, si $a < 0 < b$, alors $a^3 < b^3$.

(c) *Second cas : a et b sont de même signe.*

  (i) Montrer que pour tous réels a et b, on a :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

  (ii) Quel est le signe de a^2+ab+b^2 si a et b sont de même signe ?

(d) Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$. Conclure.

(e) Établir le tableau de variation de la fonction cube.

(f) Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et cube. Étudier (par le calcul) les positions relatives de ces deux courbes.

Exercice 2 (Fraction rationnelle et Identification)**.** Le but de l'exercice est de déterminer les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{2x-7}{x-2}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons exprimer la fonction f sous la forme $a + \frac{b}{x-2}$, où a et b sont des nombres réels.

(a) Réduire l'expression $a + \frac{b}{x-2}$ au même démonimateur.

(b) En déduire les valeurs de a et b pour que $a + \frac{b}{x-2} = f(x)$.

(c) En utilisant les variations des fonctions associées, en déduire les variations de la fonction f.

Exercice 3 (Histoire)**.** Citer une mathématicienne, et dire pourquoi elle est connue.