30/09/15
DM n° 1

Trinômes du second degré

1^eS6

Exercice 1 (Fraction rationnelle)**.**

1. *Déterminer le signe des polynômes x^2-2x-1 et $2x^2+3x+1$.*
Appelons N le polynôme $x \mapsto x^2-2x-1$. Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-1) = 4+4 = 8$, donc il a deux racines $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times 1} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times 1} = 1+\sqrt{2}$. Puisque le facteur de x^2 est positif, le tableau de signes de ce polynôme est donc :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

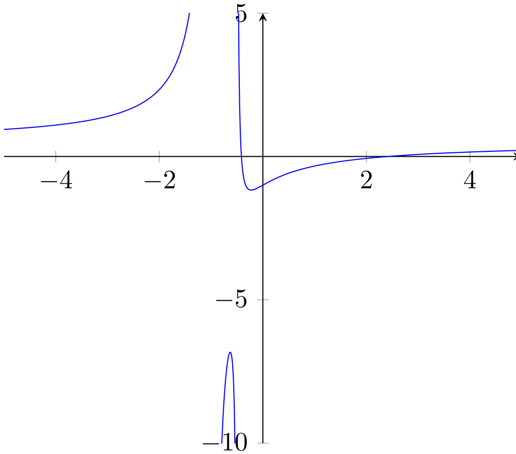
Appelons D le second polynôme $x \mapsto 2x^2+3x+1$. Son discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 9-8 = 1$. Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 2} = -1$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$. Puisque le facteur de x^2 est positif, le tableau de signe de ce polynôme est donc :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. *En déduire (i) le domaine de définition ; (ii) le signe de la fraction : $\frac{x^2-2x-1}{2x^2+3x+1}$.*
   (i) Une fraction est correctement définie si son dénominateur est non nul, c'est-à-dire si $2x^2+3x+1 \neq 0$. Nous avons vu que les deux racines de ce polynôme sont $-\frac{1}{2}$ et 1, donc le domaine de définition de la fraction est $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ (que l'on peut noter également $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$).
   (ii) Pour déterminer le signe d'une fraction, on fait un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$1-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x^2+3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-1}{2x^2+3x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ça n'était pas explicitement demandé, mais il est possible de vérifier notre résultat en traçant une représentation graphique de la fonction. Cela donne la courbe suivante.



Exercice 2 (Problème ouvert)**.** *Déterminer l'expression d'un trinôme vérifiant les trois conditions suivantes :*

(i) 1 est une des racines du trinôme ;

(ii) le sommet de sa parabole a pour abscisse 2 ;

(iii) sa parabole passe par le point $(4;6)$*.*

Il y a différentes manières de résoudre ce problème. Voici deux d'entre elles.

Première méthode Nous cherchons un trinôme du second degré, donc de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Traduisons chacune des conditions par une équation :

(i) $P(1) = 0$, soit $a + b + c = 0$;

(ii) $-\frac{b}{2a} = 2$, soit $-b = 4a$;

(iii) $P(4) = 6$, soit $16a + 4b + c = 6$.

C'est un système de trois équations à trois inconnues : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -b &= 4a \\ 16a+4b+c &= 6 \end{cases}$

Il ne reste qu'à résoudre ce système (je vous laisse faire), pour arriver à trouver comme polynôme $2x^2 - 8x + 6$.

Deuxième méthode Nous savons que 1 est une racine, et que 2 est l'abscisse du sommet de la parabole. Nous savons aussi qu'une parabole est symétrique par rapport à l'axe parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet. Donc il y a une seconde racine, qui est le symétrique de 1 par rapport à 2, c'est-à-dire 3.

La forme factorisée du trinôme est donc $a(x-1)(x-3)$.

Enfin, puisque la parabole passe par le point $(4;6)$, alors $a(4-1)(4-3) = 6$, c'est-à-dire $a \times 3 \times 1 = 6$, soit $a = 2$.

La forme factorisée du trinôme est donc $2(x-1)(x-3)$.