

Exercice 1 (Application directe — 3,5 points).

1. En utilisant le triangle de Pascal, calculer $\binom{5}{3}$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Donc $\binom{5}{2} = 10$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,8$. Calculer l'espérance de X .

$$E(X) = np = 100 \times 0,8 = 80$$

Exercice 2 (Loi binomiale — 5,5 points). Une kermesse propose le jeu suivant. Une urne contient 17 boules noires et 3 boules rouges. Le joueur tire dix boules avec remise, et la partie est gagnée s'il a obtenu au moins deux boules rouges. On s'intéresse à la probabilité de gagner.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées parmi les dix boules.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres. La variable X comptabilise le nombre de succès (obtenir une boule rouge) durant la répétition de dix épreuves de Bernoulli, identiques et indépendances. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{17+3} = \frac{3}{20}$.
2. Calculer $P(X = 1)$.

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{10}{1} \left(\frac{3}{20}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{20}\right)^{10-1} \\ &= 10 \times \frac{3}{20} \times \left(\frac{17}{20}\right)^9 \\ &\approx 35\% \end{aligned}$$

On admet que $P(X = 0) = 19,7\%$.

3. Calculer $P(X \geq 2)$. En déduire la probabilité de gagner une partie. Les événements $X \geq 2$ et $X < 2$ (ce dernier étant équivalent à $X = 0$ ou $X = 1$) sont complémentaires, donc :

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\&\approx 1 - 0,197 - 0,35 \\&\approx 0,45\end{aligned}$$

La probabilité de gagner est donc 45%.

Exercice 3 (Géométrie — 8 points). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- la droite \mathcal{D} passant par $A(15; 4)$ et de vecteur normal $\vec{u}(4; -3)$;
- le cercle \mathcal{C} de centre $I(8; 3)$ et de rayon 5.

1. Montrer qu'une équation cartésienne de \mathcal{D} est $-4x + 3y + 48 = 0$. Soit $M(x, y)$ un point de \mathcal{D} . Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-15 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et \vec{u} sont orthogonaux, et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} &= 0 \\(x - 15) \times 4 + (y - 4) \times (-3) &= 0 \\4x - 3y - 60 + 12 &= 0 \\4x - 3y - 48 &= 0 \\-4y + 3y + 48 &= 0\end{aligned}$$

2. Montrer qu'une équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$. L'équation cartésienne d'un cercle de centre de coordonnées $I(x_I, y_I)$ et de rayon r est $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$. Appliqué aux données du problème, cela donne le résultat attendu.

3. On considère le point $H(12; 0)$.

- (a) Montrer que H appartient à \mathcal{D} et à \mathcal{C} . Vérifions que les coordonnées de H vérifient les équations de \mathcal{D} et \mathcal{C} .

$$\begin{aligned}-4 \times 12 + 3 \times 0 + 48 &= -48 + 0 + 48 \\&= 0\end{aligned}$$

Donc $H \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}(12 - 8)^2 + (0 - 3)^2 &= 4^2 + (-3)^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25\end{aligned}$$

Donc $H \in \mathcal{C}$.

- (b) *Montrer que les vecteurs \overrightarrow{IH} et \overrightarrow{AH} sont orthogonaux.* Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AH}$, après avoir calculé les coordonnées des deux vecteurs : $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AH} &= 4 \times -3 + -3 \times -4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux.

4. *Quelle est la position relative de \mathcal{D} et \mathcal{C} ? Justifier.* Puisque \overrightarrow{IH} et \overrightarrow{AH} sont orthogonaux, alors les droites (IH) et (AH) sont perpendiculaires. Or $[IH]$ est un rayon. La droite (AH) est donc une droite perpendiculaire à un rayon passant par l'extrémité de ce rayon : c'est une tangente.

Exercice 4 (Trigonométrie — 4 points).

1. *Donner la formule permettant de calculer $\cos a - b$.* Formule du cours :

$$\cos a - b = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2. *Exprimer $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ sous la forme d'une fraction irréductible.*

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire une valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$.* En utilisant les deux résultats

précédents, cela donne :

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$