29/05/2015
DS n° 9

Loi binomiale
Produit scalaire
Sujet A

1ᵉS3

Exercice 1 (Application directe — 3,5 points)**.**

1. *En utilisant le triangle de Pascal, calculer* $\binom{5}{2}$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

   Donc $\binom{5}{2} = 10$.

2. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$. Calculer l'espérance de X.*
   $E(X) = np = 50 \times 0,2 = 10$

Exercice 2 (Loi binomiale — 5,5 points)**.** *Une kermesse propose le jeu suivant. Une urne contient 16 boules noires et 4 boules rouges. Le joueur tire six boules avec remise, et la partie est gagnée s'il a obtenu au moins deux boules rouges. On s'intéresse à la probabilité de gagner.*

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées parmi les six boules.

1. *Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.* La variable X comptabilise le nombre de succès (obtenir une boule rouge) durant la répétition de six épreuves de Bernoulli, identiques et indépendances. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{4}{16+4} = \frac{1}{5}$.
2. *Calculer $P(X = 1)$.*

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(1-\frac{1}{5}\right)^{6-1} \\ &= 6 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^5 \\ &\approx 39\% \end{aligned}$$

On admet que $P(X=0) = 26,2\ \%$.

3. *Calculer $P(X \geqslant 2)$. En déduire la probabilité de gagner une partie.* Les évènements $X \geqslant 2$ et $X < 2$ (ce dernier étant équivalent à $X = 0$ ou $X = 1$) sont complémentaires, donc :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ &\approx 1 - 0,262 - 0,39 \\ &\approx 0,34 \end{aligned}$$

La probabilité de gagner est donc 34%.

Exercice 3 (Géométrie — 8 points)**.** *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

— *la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(14;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(4;-3)$;*

— *le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(7;2)$ et de rayon 5.*

1. *Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $-4x+3y+47=0$.* Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{D}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-14}{y-3}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0 \\ (x-14)\times 4 + (y-2)\times(-3) &= 0 \\ 4x - 3y - 52 + 6 &= 0 \\ 4x - 3y - 47 &= 0 \\ -4y + 3y + 47 &= 0 \end{aligned}$$

2. *Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-7)^2+(y-2)^2=25$.* L'équation cartésienne d'un cercle de centre de coordonnées $I(x_I, y_I)$ et de rayon r est $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = r^2$. Appliqué aux données du problème, cela donne le résultat attendu.

3. *On considère le point $H(11;-1)$.*

   (a) *Montrer que H appartient à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{C}$.* Vérifions que les coordonnées de H vérifient les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} -4\times 11 + 3\times(-1) + 47 &= -44 - 3 + 47 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $H \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}(11-7)^2 + (-1-2)^2 &= 4^2 + (-3)^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25\end{aligned}$$

Donc $H \in \mathcal{C}$.

(b) *Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.* Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AH}$, après avoir calculé les coordonnées des deux vecteurs : $\overrightarrow{IH}\binom{4}{-3}$ et $\overrightarrow{AH}\binom{-3}{-4}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AH} &= 4 \times -3 + -3 \times -4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux.

4. *Quelle est la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$? Justifier.* Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux, alors les droites (IH) et (AH) sont perpendiculaires. Or $[IH]$ est un rayon. La droite (AH) est donc une droite perpendiculaire à un rayon passant par l'extrémité de ce rayon : c'est une tangente.

Exercice 4 (Trigonométrie — 4 points)**.**

1. *Donner la formule permettant de calculer* $\cos a+b$. Formule du cours :

$$\cos a + b = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2. *Exprimer $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ sous la forme d'une fraction irréductible.*

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{11}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire une valeur exacte de* $\cos \frac{11\pi}{12}$. En utilisant les deux résultats

précédents, cela donne :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{11\pi}{12} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{1\pi}{4}\right)\\
&= \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\
&= -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\\
&= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$