

**Exercice 1** (Termes d'une suite — 4 points). Soient :

•  $u$  la suite de premier terme  $u_2 = 3$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  ;

•  $v$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{n+1}$ .

1. Calculer  $u_4$ .  $u_3 = u_{2+1} = 3u_2 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$ , donc  $u_4 = u_{3+1} = 3u_3 + 1 = 3 \times 10 + 1 = 31$ .

2. Quelle est la valeur du troisième terme de la suite  $u$  ? Le premier terme est  $u_2$ , le deuxième est  $u_3$ , et le troisième  $u_4$ , qui a déjà été calculé, donc le troisième terme de la suite est  $u_4 = 31$ .

3. Calculer le terme de  $v$  de rang 4.  $v_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$

4. Donner les quatre premiers termes d'une suite ni croissante ni décroissante. Par exemple : 1 ; -1 ; 1 ; -1.

**Exercice 2** (Variations — 5 points). Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 18 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{n+1} \end{cases}$$

On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

1. Montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  si et seulement si  $n \geq 4$ .

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{7u_n}{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{7u_n}{n+1} \times \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{7}{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  si et seulement si  $\frac{7}{n+1} \leq 1$ , c'est-à-dire si  $n \geq 6$ .

2. En déduire que  $u$  est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.

Puisque  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  est équivalent à «  $u$  est décroissante », alors  $u$  est décroissante à partir de  $n = 6$ .

**Exercice 3** (Suite et Dérivées — 11 points). L'objet de l'exercice est d'étudier les variations de la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{n^2+3}{4(n+1)}$ .

On considère  $f$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f : x \mapsto \frac{x^2+3}{4(x+1)}$ .

1. Étude de  $f$

- (a) Montrer que  $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{4(x+1)^2}$ . On utilise la formule  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ , avec  $u = x^2 + 3$ ,  $v = 4(x + 1)$ , et donc  $u' = 2x$  et  $v' = 4$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x4(x+1) - 4(x^2+3)}{(4(x+1))^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 4x^2 - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8x - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{4(x+1)^2} \end{aligned}$$

- (b) Montrer que  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \geq 1$ . Résolvons  $f'(x) \geq 0$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{4(x+1)^2} &\geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 &\geq 0 \text{ car le dénominateur est positif} \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré, de discriminant  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$  positif, donc à deux racines, qui sont :  $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$  et  $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$ .

La dérivée  $f'$  est donc positive si  $x$  est à l'extérieur des racines. Mais puisque le domaine de définition est réduit à  $[0; +\infty[$ , cela est équivalent à  $x \geq 1$ .

- (c) En déduire les variations de  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f$			

2. En déduire les variations de  $u$  sur  $\mathbb{N}$ . Puisque  $u_n = f(n)$ , les variations de  $u$  sont les mêmes que celles de  $f$ , donc  $u$  est décroissante sur  $[0; 1]$ , et croissante sur  $[1; +\infty[$ .

### 3. Extremums

- (a) La fonction  $f$  a-t-elle des extremums ? Si oui, lesquels ? La dérivée s'annule en changeant de signe en 1, donc  $f$  a un extremum en 1. Vu le tableau de variations, c'est un minimum, et  $f(1) = \frac{1}{2}$ .
- (b) Quelle est la plus petite valeur atteinte par  $u$  ? Puisque  $u$  est décroissante jusqu'à 1, et croissante ensuite,  $u_1 = \frac{1}{2}$  est le minimum de  $u$ .