Exercice 1 (Termes d'une suite — 4 points). *Soient :*

- *u la suite de premier terme $u_2 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$;*
- *v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 1$.*

1. *Calculer u_3.* $u_3 = u_{2+1} = 2u_2 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$.
2. *Quelle est la valeur du quatrième terme de la suite u ?* Le premier terme est u_2, le deuxième est u_3, le troisième u_4, et le troisième u_5. Donc :

$$\begin{aligned} u_2 &= 5 \\ u_3 &= 2 \times 5 - 1 = 9 \\ u_4 &= 2 \times 9 - 1 = 17 \\ u_5 &= 2 \times 17 - 1 = 33 \end{aligned}$$

3. *Calculer le terme de v de rang 4.* $v_4 = 4^2 + 1 = 17$
4. *Donner les six premiers termes d'une suite ni croissante ni décroissante.* Par exemple : 1 ; -1 ; 1 ; -1 ; 1 ; -1.

Exercice 2 (Suite et Dérivées — 11 points). *L'objet de l'exercice est d'étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2+3}{4(n+1)}$.*

On considère f, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto \frac{x^2+3}{4(x+1)}$.

1. *Étude de f*
   (a) *Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{4(x+1)^2}$.* On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, avec $u = x^2 + 3$, $v = 4(x+1)$, et donc $u' = 2x$ et $v' = 4$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x4(x+1) - 4\left(x^2+3\right)}{\left(4(x+1)\right)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 4x^2 - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8x - 12}{4 \times 4(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{4(x+1)^2} \end{aligned}$$

(b) *Montrer que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$.* Résolvons $f'(x) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geqslant 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{4\left(x+1\right)^2} &\geqslant 0 \\ x^2+2x-3 &\geqslant 0 \text{ car le dénominateur est positif} \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ positif, donc à deux racines, qui sont : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$. La dérivée f' est donc positive si x est à l'extérieur des racines. Mais puisque le domaine de définition est réduit à $[0;+\infty[$, cela est équivalent à $x \geqslant 1$.

(c) *En déduire les variations de f.*

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

2. *En déduire les variations de u sur $\mathbb{N}$.* Puisque $u_n = f(n)$, les variations de u sont les mêmes que celles de f, donc u est décroissante sur $[0;1]$, et croissante sur $[1;+\infty[$.
3. *Extremums*

(a) *La fonction f a-t-elle des extremums ? Si oui, lesquels ?* La dérivée s'annule en changeant de signe en 1, donc f a un extremum en 1. Vu le tableau de variations, c'est un minimum, et $f(1) = \frac{1}{2}$.

(b) *Quelle est la plus petite valeur atteinte par u ?* Puisque u est décroissante jusqu'à 1, et croissante ensuite, $u_1 = \frac{1}{2}$ est le minimum de u.

Exercice 3 (Variations — 5 points)**.** *Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :* $\begin{cases} u_0 = 27 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1} \end{cases}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. *Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ si et seulement si $n \geqslant 4$.*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{5u_n}{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{5u_n}{n+1} \times \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{5}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ si et seulement si $\frac{5}{n+1} \leqslant 1$, c'est-à-dire si $n \geqslant 4$.

2. *En déduire que u est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.* Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ est équivalent à « u est décroissante », alors u est décroissante à partir de $n = 4$.