

CORRIGÉ

Exercice 1 (Calcul de fonctions dérivées — 4 points). *Calculer les dérivées des fonctions suivantes.*

$f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ C'est un produit des deux fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Or $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + v'u)(x) \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{5}{2}x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$g : x \mapsto \frac{2x^2-1}{x-2}$ C'est un quotient des deux fonctions $u : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $v : x \mapsto x - 2$, avec $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{u'v - v'u}{v^2} \right) (x) \\ &= \frac{4x \times (x - 2) - 1 \times (2x^2 - 1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 + 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + 1}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Tangente — 4 points).

1. *Cours* : Étant donné une fonction f et un réel a , donner l'équation de la tangente à f en a .

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2. Soit une fonction f , définie sur \mathbb{R} , telle que $f(3) = 4$, telle que la dérivée de f en 3 est 2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 3. On applique la formule précédente. La droite est une tangente en 3, donc $a = 3$. La dérivée de f en 3 est 2, donc $f'(a) = 2$, et $f(3) = 4$ donc $f(a) = 4$. Cela donne :

$$y = 2(x - 3) + 4$$

$$y = 2x - 6 + 4$$

$$y = 2x - 2$$

Exercice 3 (Statistiques — 6 points). Dans cette question, les extrémités des diagrammes en boîte représentent les valeurs extrêmes.

On a réalisé une enquête sur le temps, en secondes, que doit attendre un abonné qui contacte, par téléphone, un fournisseur d'accès à internet A. Cette enquête a concerné 200 abonnés et donné les résultats suivants.

Temps d'attente (s)	5	10	20	30	40	50
Nombre d'abonnés	20	24	32	24	58	42
Effectifs cumulés croissants	20	44	76	100	158	200

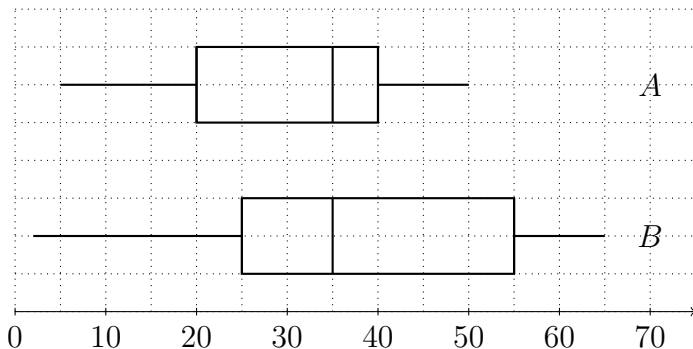
1. Calculer la médiane et les quartiles de cette série. On calcule les effectifs cumulés croissants (voir tableau ci-dessus).

Médiane Il y a 200 valeurs, donc la médiane est la moyenne des 100^e et 101^e valeurs. La 100^e valeur est 30, et la 101^e est 40, donc la médiane est $\frac{30+40}{2} = 35$.

Premier quartile Le premier quartile est la plus petite valeur telle que 25 % des valeurs (soit 50 valeurs) lui soient inférieures. C'est donc 20.

Troisième quartile Idem avec 75 % (donc 150 valeurs) : le troisième quartile est donc 40.

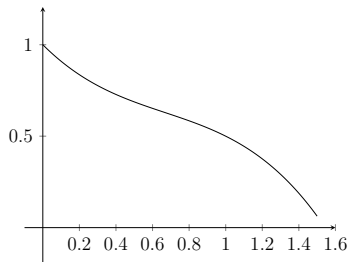
2. Une autre fournisseur d'accès, B, a réalisé la même enquête auprès de 200 de ses abonnés, et a représenté la série obtenue par le diagramme en boîte ci-dessous. Représenter par un diagramme en boîte la série obtenue pour le fournisseur A sur le même repère.



3. Comparer les deux séries, et les plates-formes téléphoniques des deux opérateurs. Bien que les deux médianes soient les mêmes, les quartiles de la série A sont inférieurs à ceux de la série B. Donc dans l'ensemble, le temps d'attente des abonnés du fournisseur A est inférieur à celui du fournisseur B.

Exercice 4 (Tobogan — 6 points).

Ingénieur dans une entreprise de fabrication d'attractions, un parc aquatique vous commande un tobogan. La forme souhaitée est la courbe représentée ci-contre (où x est l'abscisse, et $f(x)$ l'altitude, toutes les deux en décimètres), dont l'équation est :



$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 1$$

Le tobogan est considéré comme dangereux s'il n'est pas trop pentu, c'est-à-dire si à aucun endroit la pente est inférieure à -2 .

Le but de l'exercice est d'étudier le tobogan pour savoir s'il est dangereux ou non.

1. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$. La dérivée d'une somme (ou d'une différence) de fonctions est la somme (ou la différence) des dérivées des fonctions. Donc il suffit de dériver

chaque membre du monome :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \times 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1x^{1-0} \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

2. Résoudre l'inéquation $f'(x) < -2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &< -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 &< -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

Il faut étudier le signe du polynôme. A-t-il des racines ?

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times -\frac{3}{2} \times 1 \\ &= 4 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Donc Δ est strictement positif : le polynôme a deux racines. Il est donc positif entre les racines, et négatif à l'extérieur. Les deux racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{10}}{2 \times -\frac{3}{2}}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2 \times -\frac{3}{2}}$, soit $x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$	
$-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$	-	0	+	0	-

Donc $f'(x) < -2$ si $x < \frac{2-\sqrt{10}}{3}$ ou $x > \frac{2+\sqrt{10}}{3}$.

3. Le tobogan est-il dangereux ? A première vue, l'équation $f'(x) < -2$ a des solutions, donc le tobogan est dangereux. Mais il faut prendre en compte le domaine de définition de f . Nous avons

montré que $f'(x) \geq 2$ si $\frac{2-\sqrt{10}}{3} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{10}}{3}$. Mais $\frac{2-\sqrt{10}}{3} \approx -0,4$ et $\frac{2+\sqrt{10}}{3} \approx 1,7$. Or f est définie sur $[0; 1,5]$, donc f est supérieure à -2 sur son domaine de définition : le tobogan n'est pas dangereux.