

Exercice 1 (Position relative (de fonctions) — 4 points).

1. Déterminer le signe du polynôme $3x^2 + 5x - 2$. C'est un trinôme du second degré. Calculons le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 = 7^2$. Le discriminant étant positif, il y a deux racines $x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \times 3} = -2$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$. Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x^2 + 5x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. En déduire la position relative des courbes des fonctions définies sur \mathbb{R}^* par :

$$f : x \mapsto 4x^2 + \frac{1}{x} \text{ et } g : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x} - 5x + 2$$

Pour étudier la position relative de deux courbes, il faut étudier $f(x) \leq g(x)$.

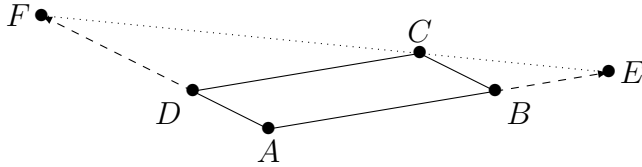
$$\begin{aligned}
 f(x) &\leq g(x) \\
 4x^2 + \frac{1}{x} &\leq x^2 + \frac{1}{x} - 5x + 2 \\
 4x^2 - x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 4x - 1 &\leq 0 \\
 3x^2 + 5x - 2 &\leq 0
 \end{aligned}$$

On reconnaît le polynôme étudié dans la question précédente. Donc $f(x) \leq g(x)$ si et seulement si le polynôme en question est négatif, c'est à dire si $x \in [-2; 0[\cup]0; \frac{1}{3}]$ (en ayant exclu 0 car ni f ni g ne sont définies en 0).

Conclusion : la courbe de f est au dessus de celle de g si $x \in]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$.

Exercice 2 (Géométrie — 7 points). Soit $ABCD$ un parallélogramme. On place les points E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, et F tel que $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AD}$.

1. Faire une figure.



2. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3. Exprimer \overrightarrow{CF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

4. Que peut-on dire des points E , C et F ?

Voici deux méthodes possibles pour répondre à cette question.

Première méthode On observe que $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{CE}$, donc les vecteurs \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CE} sont colinéaires, donc C , E et F sont alignés.

Seconde méthode Nous avons montré que les coordonnées de \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CE} dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ sont $\overrightarrow{CF}(-1; 2)$ et $\overrightarrow{CE}(\frac{1}{2}; -1)$. Vérifions la condition de colinéarité : $-1 \times -1 - \frac{1}{2} \times 2 = 1 - 1 = 0$. Donc les vecteurs sont colinéaires, et les points E , C et F sont alignés.

Exercice 3 (Position relative (de droites) — 9 points). *Le but de l'exercice est d'écrire un algorithme indiquant le nombre de points d'intersection entre deux droites.*

1. Cas particulier *Soient deux droites définies par leur équation cartésienne $d_1 : 2x + y - 1 = 0$ et $d_2 : x - y + 2 = 0$.*

(a) *Déterminer un vecteur directeur de d_1 , et un vecteur directeur de d_2 .* Pour une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, le vecteur $(-b; a)$ est un vecteur directeur.

Donc les vecteurs de coordonnées $\vec{u}_1(-1; 2)$ et $\vec{u}_2(1; 1)$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2 .

(b) *Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?* Vérifions la condition de colinéarité : $-1 \times 1 - 2 \times 1 = -3$. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(c) *En déduire le nombre de points d'intersection entre ces deux droites.* Les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles, et elles ont un unique point d'intersection.

2. Cas général *Soient deux droites $d_1 : ax + by + c = 0$ et $d_2 : a'x + b'y + c' = 0$.*

(a) *Donner l'expression d'un vecteur directeur pour chacune des droites, et donner la condition pour que ces vecteurs soient colinéaires.* En utilisant les mêmes arguments que dans les questions précédentes, on obtient que les vecteurs $\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{u}'(-b'; a')$ sont des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 . Ils sont colinéaires si $-ba' + b'a = 0$.

(b) *Compléter l'algorithme suivant.* Les droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, donc dans l'algorithme, la condition à ajouter est : $-ba' + b'a = 0$.

(c) *Modifier l'algorithme pour qu'au lieu d'afficher que les droites sont parallèles, il affiche l'une des deux phrases Les droites n'ont aucun point commun ou Les droites ont une infinité de points d'intersection.*

C'est une question plus technique qu'il n'y paraît. Dans le cas où les droites sont parallèles, nous distinguons deux cas :

- Les droites sont parallèles à l'axe des ordonnées (« verticales »). Cela correspond au cas où $b = b' = 0$ (pour le prouver, passer par l'équation réduite), et elles sont confondues si et seulement si $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ (ces nombres sont bien définis car $a \neq 0$ et $a' \neq 0$).
- Les droites ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées : leur équation réduite est donc de la forme $y = mx + p$. Nous savons déjà que leurs coefficients directeurs sont égaux (puisqu'elles sont parallèles). Elles sont donc confondues si et seulement si leur ordonnée à l'origine est égale, c'est-à-dire si $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$.

On peut donc remplacer la ligne **Afficher** "Les droites sont parallèles" par les lignes suivantes :

```

Si  $b = 0$ 
Alors
  Si  $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ 
  Alors
    Afficher "Une infinité de
                points d'intersection."
  Sinon
    Afficher "Aucun point
                d'intersection."
  FinSi
Sinon
  Si  $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ 
  Alors
    Afficher "Une infinité de
                points d'intersection."
  Sinon
    Afficher "Aucun point
                d'intersection."
  FinSi
FinSi

```

Question : Pourquoi est-il suffisant de tester seulement $b = 0$ (et non pas $b = 0$ et $b' = 0$) ?