5 mai 2015
DM n° 8

Trigonométrie
Équations cartésiennes

1^e S3

- *Le premier exercice est obligatoire.*
- *Faire un des deux exercices 2 et 3 au choix (de préférence le 3, plus difficile).*
- *Le dernier exercice est optionnel (mais jetez-y un coup d'œil tout de même : il peut-être très rapide).*

Exercice 1 (Trigonométrie)**.** Prouver que pour tout t réel, on a :

- $\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- $\sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

Exercice 2 (Droite et Cercle)**.** On se place dans une repère orthonormé.

On considère la droite d passant par $A\,(6;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2;2)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

1. Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.

Soit $M\,(x;y)$ un point appartenant à la fois à d et $\mathcal{C}$.

2. Montrer que x vérifie $(x-3)^2 + (10-x)^2 = 25$.
3. En déduire que x vérifie $x^2 - 13x + 42 = 0$.
4. En déduire les valeurs possibles de x.
5. En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

Exercice 3 (Droite et Cercle)**.** On se place dans un repère orthonormé.

Étant donné un nombre réel α, on considère la droite d_α passant par $A\,(\alpha;\alpha)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(3;3)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et $\mathcal{C}$, en fonction de α.

1. Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.

Soit $M\,(x;y)$ un point appartenant à la fois à d_α et $\mathcal{C}$.

2. Montrer que x vérifie $(x-3)^2+(2\alpha-x-2)^2=25$, puis que x vérifie $x^2-(1+2\alpha)\,x+2\alpha^2-4\alpha-6=0$.

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y, le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ est égal au nombre de solutions de cette équation du second degré en x, et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ.

3. Montrer que $\Delta=-4\alpha^2+20\alpha+25$.
4. Montrer que le signe de Δ, en fonction de α, est :

α	$-\infty$		$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$		$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ en fonction de α.

Exercice 4 (Chercher l'erreur)**.** Soit f la fonction carrée : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,:\,x\mapsto x^2$. Calculons la dérivée de f de deux manières différentes.

D'une part, on a $f'(x)=2x$.

D'autre part, on a

$$f(x)=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{x \text{ fois}}$$

Donc :

$$f'(x)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x \text{ fois}}=x$$

Bilan : Nous avons montré que $f'(x)=2x$ et $f'(x)=x$. Donc $2x=x$. En prenant $x=1$, nous obtenons $2=1$.