Exercice 1 (Trigonométrie)**.** *Prouver que pour tout t réel, on a :*

- $\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- $\sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

On sait que pour tous réels a et b, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Donc :

$$\begin{aligned}\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t \cos\frac{2\pi}{3} - \sin t \sin\frac{2\pi}{3}\\ &= \cos t \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin t \times \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t \cos\frac{2\pi}{3} + \sin t \sin\frac{2\pi}{3}\\ &= \cos t \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin t \times \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) =& \cos t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\\ &- \frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\\ =& \cos t - 2 \times \frac{1}{2}\cos t\\ =& 0\end{aligned}$$

Second calcul est similaire, en prenant la formule de duplication des sinus.

Exercice 2 (Droite et Cercle)**.** *On se place dans une repère orthonormé.*

On considère la droite d passant par $A\,(6;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2;2)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B\,(3;2)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et $\mathcal{C}$.

1. *Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.*

   Droite Soit $M(x, y)$ un point quelconque de d. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-6}{y-6}$ et $\overrightarrow{u}\binom{2}{2}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire et nul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0 \\ (x-6) \times 2 + (y-6) \times 2 &= 0 \\ 2x - 12 + 2y - 12 &= 0 \\ 2y &= 24 - 2x \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

   Cercle Soit M un point du cercle de centre $B\,(3; 2)$ et de rayon 5. Alors la distance BM vaut 5, et :

$$\begin{aligned} BM^2 &= 25 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Soit $M\,(x; y)$ un point appartenant à la fois à d et $\mathcal{C}$.

2. *Montrer que x vérifie $(x-3)^2 + (10-x)^2 = 25$.* Puisque M appartient $\mathcal{C}$, ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $\mathcal{C}$, et $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Mais M est dans d également, donc $y = 12 - x$. Utilisé dans l'équation précédente, cela donne :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (12 - x - 2)^2 &= 25 \\ (x-3)^2 + (10-x)^2 &= 25 \end{aligned}$$

3. *En déduire que x vérifie $x^2 - 13x + 42 = 0$.* En partant de l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (10-x)^2 &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 + 100 - 20x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 - 26x + 84 &= 0 \\ x^2 - 13x + 42 &= 0 \end{aligned}$$

4. *En déduire les valeurs possibles de x.* Nous obtenons un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 42 = 1$. Il est positif, donc il y a deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-(-13)-\sqrt{1}}{2\times1} = 6$ et $x_2 = \frac{-(-13)+\sqrt{1}}{2\times1} = 7$.

5. *En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathcal{C}$.* Puisque $y = 12 - x$, et que $x = 6$ ou $x = 7$, nous obtenons deux points d'intersection, de coordonnées respectives $\binom{6}{12-6}$ soit $\binom{6}{6}$ d'une part, et $\binom{7}{12-7}$ soit $\binom{7}{5}$ d'autre part.

Exercice 3 (Droite et Cercle)**.** *On se place dans un repère orthonormé.*

Étant donné un nombre réel α, on considère la droite d_α passant par $A(\alpha;\alpha)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(3;3)$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B(3;2)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et $\mathcal{C}$, en fonction de α.

1. *Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$.*

   Droite Soit $M(x;y)$ un point quelconque de d_α. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-\alpha}{y-\alpha}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} &= 0 \\
(x-\alpha)\times 2 + (y-\alpha)\times 2 &= 0 \\
2x - 2\alpha + 2y - 2\alpha &= 0 \\
2y &= 4\alpha - 2x \\
y &= 2\alpha - x
\end{aligned}$$

   Cercle Voir la démonstration à la question 1 de l'exercice 2.

Soit $M(x;y)$ un point appartenant à la fois à d_α et $\mathcal{C}$.

2. *Montrer que x vérifie $(x-3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 = 25$, puis que x vérifie $x^2 - (1+2\alpha)x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$.* Puisque M est un point du cercle, alors $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. D'autre part, puisque M est un point de la droite, alors $y = 2\alpha - x$. Donc :

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 &= 25 \\
(x-3)^2 + (2\alpha - 2 - x)^2 &= 25 \\
x^2 - 6x + 9 + (2\alpha-2)^2 - 2(2\alpha-2)x + x^2 &= 25 \\
x^2 - 6x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + (4-4\alpha)x + x^2 &= 25 \\
2x^2 + (4 - 4\alpha - 6)x + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - 25 &= 0 \\
2x^2 - (2+4\alpha)x + 4\alpha^2 - 12 - 8\alpha &= 0 \\
x^2 - (1+2\alpha)x + 2\alpha^2 - 6 - 4\alpha &= 0
\end{aligned}$$

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y, le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ est égal au nombre de solutions de cette équation du *second degré en x, et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ.*

3. *Montrer que $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$.*

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(1+2\alpha))^2 - 4 \times 1 \times \left(2\alpha^2 - 6 - 4\alpha\right) \\ &= 1 + 4\alpha + 4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 24 + 16\alpha \\ &= -4\alpha^2 + 20\alpha + 25\end{aligned}$$

4. *Montrer que le signe de Δ, en fonction de α, est :*

α	$-\infty$		$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$		$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous obtenons un trinôme du second degré en α, de discriminant $20^4 - 4 \times (-4) \times 25 = 800 = 2 \times 20^2$. Il est positif, donc le trinôme a deux racines $\alpha_2 = \frac{-20-\sqrt{2\times20^2}}{2\times-4} = \frac{-20-20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5+5\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha_1 = \frac{-20+\sqrt{2\times20^2}}{2\times-4} = \frac{-20+20\sqrt{2}}{-8} = \frac{5-5\sqrt{2}}{2}$. Nous obtenons donc le tableau de signes demandé.

5. *En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et $\mathcal{C}$ en fonction de α.* Trois cas sont possibles :

   — si $\alpha \in]\alpha_1;\alpha_2[$, alors Δ est strictement positif, le trinôme en x a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection ;

   — si $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$, alors Δ est nul, le trinôme en x a une seule solution, et la droite et le cercle ont un seul point d'intersection (dans ce cas, la droite est tangente au cercle) ;

   — enfin, si $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$, alors Δ est strictement négatif, le trinôme en x n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun points d'intersections (la droite est extérieure au cercle).