Dérivation Suites
Corrigé

Exercice 1 (Inéquation)**.** *Le but de l'exercice est de trouver les solutions de $x\sqrt{x} \geqslant 8$.*

1. *On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.*
   (a) *Étudier les variations de f.* Commençons par dériver f. C'est un produit de deux fonctions ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$) de dérivées respectives $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

   Puisque la racine carrée est toujours strictement positive (sauf en 0), f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   (b) *Trouver une solution évidente à $f(x) = 8$.* En tatonnant, on trouve $f(4) = 4\sqrt{4} = 8$.

2. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.* Puisque la fonction f est strictement croissante, et $f(4) = 8$, alors :
   — pour tout $x < 4$, $f(x) < 8$;
   — pour tout $x > 4$, $f(x) > 8$.

   Donc les solutions sont $x \geqslant 4$.

Exercice 2 (Partage de tarte)**.**

2. En utilisant les suites. *On commence par couper la tarte en quatre parts égales, et chacun des trois convives prend une part. Puis on coupe la part restante en quatre parts, et chacun prend une part. Puis on recommence sur la part restante, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste que des miettes.*

On considère que l'aire de la tarte est égale à 1.
Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : « u_n est la taille de la part de tarte prise par chacun des convives après la n^e coupe ». Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3.

(a) i. *Quelles sont les cinq premières valeurs de u ?* La première valeur, u_1, est $^1/_4$. La seconde valeur est un quart de la part qui reste, c'est-à-dire un quart de un quart, ou $^1/_{16}$. La troisième valeur est un quart de la part qui reste lors de la découpe précédente, donc un quart de $^1/_{16}$, ou $^1/_{64}$. Et ainsi de suite :

k	1	2	3	4	5
u_k	$^1/_4$	$^1/_{16}$	$^1/_{64}$	$^1/_{256}$	$^1/_{1024}$

ii. *Calculer $\frac{1}{4^n}$, pour n valant 1, 2, 3, 4 puis 5.* On obtient :

k	1	2	3	4	5
u_k	$^1/_4$	$^1/_{16}$	$^1/_{64}$	$^1/_{256}$	$^1/_{1024}$

iii. *Vérifier que pour les cinq premières valeurs de n, $u_n = \frac{1}{4^n}$.* Il suffit de remarquer que les deux précédents tableaux contiennent les mêmes valeurs.

On admet que ce résultat est vrai pour tous les nombres entiers naturels : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{4^n}$.

(b) *On note P_n la part totale de tarte de chaque convive après n coupes, c'est-à-dire la somme des parts prises au cours de ces coupes : $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.*

i. *Calculer les cinq premières valeurs de P.* Le calcul est du même genre que le calcul des effectifs cumulés croissants (les valeurs données sont approchées) :

n	1	2	3	4	5
u_n	$^1/_4$	$^1/_{16}$	$^1/_{64}$	$^1/_{256}$	$^1/_{1024}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$	$0,25$	$0,3125$	$0,328$	$0,3320$	$0,3330$

ii. *Vers quelle valeur semble tendre P ?* Cette valeur semble s'approcher de $^1/_3$.

(c) *Conclure : Cette méthode permet-elle de découper la tarte en trois part égales ?* En théorie, puisque la part totale des convives tend vers $^1/_3$, chaque convive aura un tiers de la tarte. En pratique…