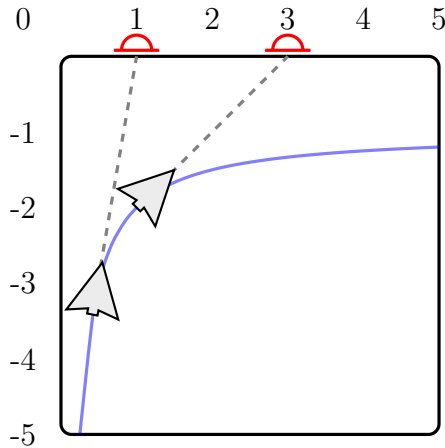


Exercice 2 (Tangente). La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation $y = -1 - \frac{1}{x}$

L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



1. Montrer que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y = \frac{x-a^2-2a}{a^2}$. La formule générale de la tangente à f en a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. La dérivée de la fonction f est ici $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, donc la formule de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a^2} (x - a) - 1 - \frac{1}{a} \\ &= \frac{x - a}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{a^2} \\ &= \frac{x - a - a^2 - a}{a^2} \\ &= \frac{x - a^2 - 2a}{a^2} \end{aligned}$$

2. En quels points de sa trajectoire, l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les deux monstres situés en haut de l'écran en $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Pour atteindre le monstre situé en A, il faut que le missile, donc la tangente, passe par le point A. Il faut donc (en remarquant que $a \neq 0$) que :

$$0 = \frac{1 - a^2 - 2a}{a^2}$$

$$0 = 1 - a^2 - 2a$$

$$0 = a^2 + 2a - 1$$

C'est un trinôme du second degré : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$. Le discriminant étant positif, il y a deux racines :

$$a_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times 1} = -\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$a_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

La première solution étant négative, elle n'est pas valide. Reste la seconde : l'avion doit être au point d'abscisse $-1 + \sqrt{2}$ pour tuer le premier monstre.

Le même raisonnement avec le deuxième point B $(3; 0)$ donne deux solutions, dont une seule est acceptable : le point d'abscisse $a = 1$.