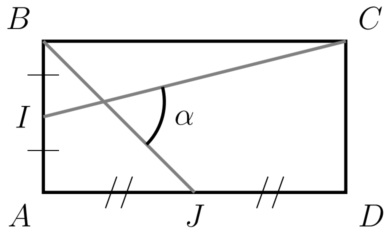
Vecteurs
Correction

Exercice 1 (Mesure d'angle).

On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-contre, où $AB = 1$ et $AD = 2$, et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$. L'objet de l'exercice est de déterminer une mesure (approchée) de l'angle α.



Nous allons exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ}$.

1. *Première expression. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ})$, orthonormé.* Remarque : Il aurait été plus simple de de se placer dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AB}\right)$; désolé.
   (a) *Donner les coordonnées des points B, C, I, J dans ce repère.* On a : $B\,(1, 0)$, $C\,(1, 2)$, $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, et $J\,(0, 1)$.
   (b) *En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ}$.* On utilise la formule avec les coordonnées, en remarquant d'abord que $\overrightarrow{IC}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et $\overrightarrow{BJ}\,(-1, 1)$: $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \times (-1) + 2 \times 1 = \frac{3}{2}$.
2. *Seconde expression.*
   (a) *Calculer les longueurs BJ et IC.* Pour calculer les deux longueurs, on utilise la formule (qui se retrouve avec le théorème de Pythagore) : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$$BJ = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$IC = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (2-0)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(b) *En déduire, en fonction de α, la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ}$.* Nous utilisons l'expression avec le cosinus :

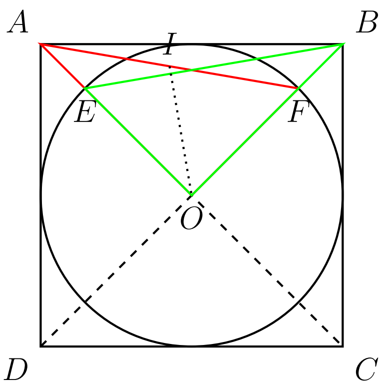
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{BJ} &= IC.BJ.\cos\alpha \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2}.\sqrt{2}\cos\alpha \\ &= \frac{\sqrt{34}}{2}\cos\alpha\end{aligned}$$

3. *En déduire une valeur de α, arrondie à 0,01 radians près.* En réunissant les deux expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \frac{\sqrt{34}}{2}\cos\alpha \\ \frac{3}{\sqrt{34}} &= \cos\alpha \\ \alpha &\approx 1,03\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Triangles)**.**

Exercice 82 p. 261 dans le livre.



On appelle I le milieu de $[AF]$. La médiane de AFO issue de O est la droite (IO). Pour prouver que cette médiane est la hauteur de EFB issue de O, il faut montrer que (IO) et (EB) sont perpendiculaires. Nous allons le montrer avec le produit scalaire.

Méthode 1 Commençons par décomposer $\overrightarrow{IO}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Méthode alternative :} \\ \qquad 2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FO} \\ \text{Or } I \text{ étant le milieu de } [AF],\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0}, \text{ donc :} \\ \qquad 2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} \\ \text{et enfin :} \\ \qquad \overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FO}\end{array}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{EB} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}\right).\left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FO}.\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{FO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FO}.\overrightarrow{EO} &= 0 \\ \overrightarrow{FO}.\overrightarrow{OB} &= -FO \times OB \\ \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EO} &= EO \times AO \\ \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} &= 0\end{aligned}$$

Enfin, puisque $EO = FO$ et $OB = AO$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{EB} &= \frac{1}{2}\left(-FO \times OB + EO \times AO\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-FO \times OB + FO \times OB\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc (IO) et (EB) sont perpendiculaires, et la médiane de AFO issue de O est la hauteur de EBO issue de O.

Méthode 2 *Ne sont données que les grandes lignes.*

Il est également possible de choisir un repère, comme $\left(O, \frac{\overrightarrow{OF}}{||\overrightarrow{OF}||}, \frac{\overrightarrow{OE}}{||\overrightarrow{OE}||}\right)$. D'autres repères sont possibles, mais celui-ci va simplifier un peu les calculs. Dans ce repère, on a $\overrightarrow{OI}\left(\frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{EB}\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ (où a est le rayon du cercle), donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EB} &= \frac{a}{2} \times a\frac{\sqrt{2}}{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{a}{2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$