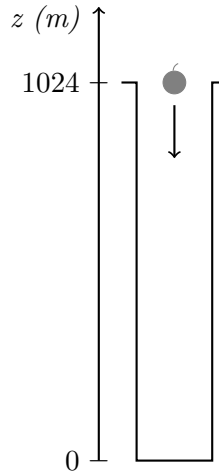


Exercice 1 (Application à la physique).

Isaac voudrait déterminer la valeur de g , intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1024 m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et 1024 m en haut.



Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a , b et c , pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g .

- (1) Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$. Au début de la chute (à $t = 0$), la pomme est au sommet du puits, soit à une altitude de 1024 m. Donc $z(0) = 1024$. Or $z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 1024$.
- (2) La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z . Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.
 - (a) Dériver z , et en déduire l'expression de v en fonction de a et b .
La fonction z est un polynôme, donc sa dérivée est $v(t) = z'(t) = 2at + b$.
 - (b) Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$. La pomme est lâchée du haut du puits, donc sa vitesse initiale est nulle : $v(0) = 0$. Or, nous venons de montrer que $v(t) = 2at + b$. Donc $0 = v(0) = 2a \times 0 + b = b$, donc $b = 0$.

- (c) *Exprimer z et v en fonction de a et t . Les questions précédentes montrent que $z(t) = at^2 + 1024$, et $v(t) = 2at$.*
- (3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5s. Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$. Cela signifie que la pomme touche le sol au bout de 14,5 secondes, donc que $z(14,5) = 0$. Donc $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$, ce qui donne $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$.*
- (4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g . Puisque $v(t) = 2at$, $v'(t) = 2a$, donc $-g = 2a$ et $g = -2a \approx -2 \times -4,87 \approx 9,74$ (pour information, l'unité de g est $m.s^{-2}$, mais ça n'était pas demandé).*

Exercice 2 (Moyenne et écart-type).

1. *Pour cette question, vous pouvez vous servir d'un tableur ou d'une calculatrice. Pour relever « artificiellement » les notes d'un devoir, un professeur hésite entre deux méthodes : ajouter un demi-point à toutes les copies, ou multiplier la note de chaque copie par 1,1.*

- (a) *Choisir aléatoirement une série de notes, et calculer la moyenne et l'écart-type. Ces données ont été obtenues à l'aide d'un tableur.*

	\bar{x}										σ	
Notes	5	11	19	8	19	17	15	0	2	14	11,00	6,96
+0,5	5,5	11,5	19,5	8,5	19,5	17,5	15,5	0,5	2,5	14,5	11,50	6,96
$\times 1,1$	5,5	12,1	20,9	8,8	20,9	18,7	16,5	0	2,2	15,4	12,10	7,66

- (b) *Ajouter 0,5 à chaque note. Comment évoluent la moyenne et l'écart-type ? Voir la seconde ligne du tableau. On observe que la moyenne est augmentée de 0,5, mais que l'écart-type ne change pas.*
- (c) *Multiplier chaque note par 1,1. Comment évoluent la moyenne et l'écart-type ? Voir la troisième ligne du tableau. On remarque que la moyenne est multipliée par 1,1, de même que l'écart-type.*
2. *Cette question est difficile à ce stade. Essayez, mais ne vous découragez pas si vous ne réussissez pas. On considère une série statistique de valeurs x_1, x_2, \dots, x_p et d'effectifs n_1, n_2, \dots, n_p (on note N l'effectif total).*
- (a) *Rappeler la formule permettant de calculer la moyenne \bar{x} , et celle de l'écart-type σ .*

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i \quad V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 \quad \sigma = \sqrt{V}$$

- (b) On ajoute 0,5 à chaque valeur de la série. Montrer que la nouvelle moyenne \bar{x}_+ est égale à $\bar{x} + 0,5$. Montrer que le nouvel écart-type σ_+ est égal à σ .

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_+ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i + 0,5) & V_+ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i + 0,5 - \bar{x}_+)^2 \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p (n_i x_i + 0,5 n_i) & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i + 0,5 - (\bar{x} + 0,5))^2 \\
 &= \frac{1}{N} \left(\left(\sum_{i=1}^p n_i x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^p 0,5 n_i \right) \right) & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i + 0,5 - \bar{x} - 0,5)^2 \\
 &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i \right) + \frac{0,5}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i \right) & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i - \bar{x})^2 \\
 &= \bar{x} + \frac{0,5}{N} N \text{ car } \sum_{i=1}^p n_i = N & &= V \\
 &= \bar{x} + 0,5 & \text{Donc } V_+ &= V, \text{ et } \sigma_+ = \sigma.
 \end{aligned}$$

- (c) On multiplie chaque valeur de la série d'origine par 1,1. Montrer que la nouvelle moyenne \bar{x}_\times est égale à $1,1\bar{x}$. Montrer que le nouvel écart-type σ_\times est égal à $1,1\sigma$.

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_\times &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i 1,1 x_i & V_\times &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (1,1 x_i - \bar{x}_\times)^2 \\
 &= \frac{1,1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (1,1 x_i - 1,1 \bar{x})^2 \\
 &= 1,1 \bar{x} & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p 1,1^2 n_i (x_i - \bar{x})^2 \\
 & & &= 1,1^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 \\
 & & &= 1,1^2 V
 \end{aligned}$$

Pour calculer l'écart-type, commençons par calculer la variance V :

Donc $V_x = 1,1^2V$, et

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{V_x} \\ &= \sqrt{1,1^2V} \\ &= 1,1\sqrt{V} \\ &= 1,1\sigma\end{aligned}$$

Exercice 3 (Défi (optionnel)). Calculer :

$$p = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} ij$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} ij &= \sum_{i=1}^{100} \left(i \sum_{j=1}^{100} j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{100} j \right) \left(\sum_{i=1}^{100} i \right) \\ &= \left(\frac{100 \times (100 + 1)}{2} \right) \left(\frac{100 \times (100 + 1)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{100 \times (100 + 1)}{2} \right)^2 \\ &= 25502500\end{aligned}$$

On pouvait également calculer cela avec un algorithme, ce qui donne le même résultat.

```
somme ← 0
for i from 1 to 100
  for j from 1 to 100
    somme ← somme + i × j
FinPour
FinPour
Afficher somme
```
