CORRIGÉ

Question 1 (Interpolation polynômiale)**.**

(a) *(Optionnel) Soient trois points* $(-3; 23)$*,* $(2; 28)$*,* $(-1; 1)$*. Montrer que le polynôme* $f : x \mapsto 4x^2 + 5x + 2$ *est l'unique polynôme du second degré passant par ces trois points.*

Nous recherchons un polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Les trois variables sont a, b et c. Puisque $(-3; 23)$ est un point de la courbe du polynôme, on a : $a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c = 23$. Des équations similaires pour les deux autres points donnent le système suivant :

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 23 \\ 4a + 2b + c = 28 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

Nous avons un système de trois équations à trois inconnues. Cela se résout de manière similaire à un système de deux équations à deux inconnues.

— En soustrayant les lignes 1 et 2 de ce système, on trouve : $4a - 9a + 2b - (-3)\,b + c - c = 28 - 23$, soit $-5a + 5b = 5$, ou encore $-a + b = 1$.

— En soustrayant les lignes 2 et 3, on obtient : $4a - a + 2b - (-b) + c - c = 28 - 1$, soit $3a + 3b = 27$, ou encore $a + b = 9$.

Nous avons donc obtenu le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

L'unique solution est $a = 4$ et $b = 5$. Enfin, en remplaçant a et b par leurs valeurs dans la troisième équation de notre système original, nous trouvons $4 - 5 + c = 1$, donc $c = 2$.

Nous avons donc trouvé une unique solution à ce système : $a = 4$, $b = 5$, $c = 2$. Donc le trinôme que nous cherchons est unique, et c'est $x \mapsto 4x^2 + 5x + 2$.

(b) *Soient deux points* $(2; 28)$ *et* $(-1; 1)$*. Trouver au moins deux polynômes du second degré dont la représentation graphique passe par ces points.*

Le trinôme f cité précédemment est une première solution. Pour trouver une autre solution, nous pouvons chercher un trinôme en prenant arbitrairement $a = 1$ (donc $x^2 + bx + c$). En notant que nos deux points passent par la courbe de ce trinôme, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 2^2 + 2b + c = 28 \\ (-1)^2 - b + c = 1 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues, donc l'unique solution est $b = 8$ et $c = 8$. Nous avons donc trouvé un second trinôme qui passe par ces deux points : $x \mapsto x^2 + 8x + 8$.

Question 2 (Application pratique). (a) *Pour préparer un nouveau larcin, Robin, Killian et Margot veulent ouvrir le coffre y prendre du matériel. Retrouver le code du coffre à partir de leurs points respectifs $R(-3; 23)$, $K(2; 28)$, $M(-1; 1)$.* Nous avons montré (dans la question 1) qu'il existe un seul polynôme passant par ces trois points : $4x^2 + 5x + 2$. Donc le code du coffre est 452.

(b) *Leur larcin ne s'est pas passé comme prévu, et Killian et Margot ont été pris. Ils finissent par donner leurs points $K(2; 28)$ et $M(-1; 1)$ à la police. Montrer qu'à partir de ces seules informations, la police ne peut pas retrouver le trinôme original, et donc le code du casier.* Nous avons vu (toujours à la question 1) qu'une infinité de polynômes passe par ces deux points. Donc la police a une infinité de codes possibles : elle ne pourra pas ouvrir le coffre.

Question 3 (Cassage de code). (a) *(Optionnel)* Rayane est passionné d'informatique. Il se dit que pour trouver le code, il lui suffit d'énumérer tous les polynômes possibles, et de ne conserver que ceux qui passent par les points de Killian et Margot.

(i) *Compléter l'algorithme suivant, mis en place par Rayane.*

```
for a from 0 to 9
  for b from 0 to 9
    for c from 0 to 9
      Si a × 2² + 2 × b + c = 28 et a × (−1)² + b × (−1) + c = 1
      Alors
        Afficher "Une solution possible est", a, b, c
      FinSi
    FinPour
  FinPour
FinPour
```

(ii) *Écrire le programme correspondant dans le langage de votre choix, et l'exécuter.* En Python cela donne :

```
for a in range(0, 10):
    for b in range(0, 10):
        for c in range(0, 10):
            if (a*2**2+b*2+c == 28
                and a*(-1)**2+b*(-1)+c==1):
                print "Solution possible :", a, b, c
```

(iii) *Quels sont les résultats ? Rayane va-t-il arriver à ses fins ?*

Les résultats sont :

```
Solution possible : 1 8 8
Solution possible : 2 7 6
Solution possible : 3 6 4
Solution possible : 4 5 2
Solution possible : 5 4 0
```

Le programme a énuméré cinq codes possibles. Il est possible de tous les tester dans un temps raisonnable : Rayanne va réussir à ouvrir le coffre.

Véronique recherche un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ passant par les points de Killian et Margot.

(i) *Vérifier qu'à partir des points de Killian et Margot, Véronique peut déduire que $a = 9 - b$, et $c = 2b - 8$.* Puisque la courbe du polynôme passe par les deux points, on a $P(2) = 28$ et $P(-1) = 1$, soit :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 28 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient $4a - a + 2b - (-b) + c - c = 28 - 1$, soit $3a + 3b = 27$, donc $a + b = 9$, ou encore $a = 9 - b$.

En soustrayant quatre fois la seconde équation à la première, on obtient $4a - 4a + 2b - 4 \times (-b) + c - 4c = 28 - 4$, soit $6b - 3c = 24$, donc $2b - c = 8$, ou encore $c = 2b - 8$.

(ii) *Quelles sont les valeurs possibles de b ?* Étant un chiffre, b peut prendre comme valeurs tous les entiers entre 0 et 9.

(iii) *Faire une table de toutes les valeurs possibles de b, et des valeurs de a et c correspondants.*

b	$a = 9 - b$	$c = 2b - 8$
0	9	-8
1	8	-6
2	7	-4
3	6	-2
4	5	0
5	4	2
6	3	4
7	2	6
8	1	8
9	0	10

(iv) *En déduire les codes possibles. Véronique va-t-elle réussir à ouvrir le casier ?* Étant des chiffres, a et c aussi doivent être compris entre 0 et 9. Il n'y a donc cinq lignes qui conviennent (celles pour b allant de 4 à 8), et Véronique aura le temps de tester les cinq codes possibles : elle réussira à ouvrir le coffre.

(b) *Comparer et commenter les méthodes de Véronique et Rayane.* Dans ce cas, les deux méthodes fonctionnent aussi bien l'une que l'autre.