Devoir surveillé — Une heure

Exercice 1 (Cours et application directe — 9 points)**.** Les questions sont indépendantes.

1. Démontrer que pour tous réels a et b, on a :
$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
2. En utilisant la formule du sinus de la somme ($\sin(a+b) = \ldots$), prouver que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
3. Soit un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 2$, $AD = 5$, $AC = 6$. Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
4. Soit un triangle ABC tel que $AB = 2$, $BC = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer AC.

Exercice 2 (Dérivation — 3 points)**.** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (l'ensemble des réels positifs non nuls).

1. Calculer $f'(x)$ (pour $x > 0$).
2. Résoudre $f'(x) > 0$.
3. En déduire les variations de f.

Exercice 3 (Géométrie — 8 points)**.** Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(3;2)$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$, et $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(-2;1)$.

1. Équations
   (a) Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$, la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, est $-2x + y + 4 = 0$.
   (c) Donner son équation réduite.
2. Soit $M(x;y)$ un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (on admet qu'un tel point existe).
   (a) Montrer que x vérifie l'équation $5x^2 - 30x + 40 = 0$.
   (b) Résoudre cette équation.
   (c) En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.