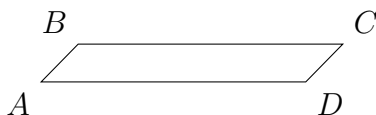


DEVOIR SURVEILLÉ
Une heure

Exercice 1 (Cours et application directe — 9 points).

1. Démontrer que pour tous réels a et b , on a : $\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Voir le cours.
2. En utilisant la formule du sinus de la somme ($\sin(a+b) = \dots$), prouver que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Quels que soient a et b réels, on a $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Donc $\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x = \sin x \times -1 + 0 \times \cos x = -\sin x$.
3. Soit un parallélogramme $ABCD$, avec $AB = 2$, $AD = 5$, $AC = 6$. Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.



$ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - AD^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 - 2^2 - 5^2) = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

4. Soit un triangle ABC tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. Déterminer AC . On applique le théorème d'Al Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$.
Donc $AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}$
 $AC^2 = 7$, et $AC = \sqrt{7}$.

Exercice 2 (Dérivation — 3 points). On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x - \sqrt{x}$, dérivable sur \mathbb{R}^{+*} (l'ensemble des réels positifs non nuls).

1. Calculer $f'(x)$ (pour $x > 0$). $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. Résoudre $f'(x) > 0$.
 $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 1$ car \sqrt{x} est positif.
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$ car \sqrt{x} est positif.
3. En déduire les variations de f .

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			

Exercice 3 (Géométrie — 8 points). Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(3; 2)$, \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$, et \vec{n} le vecteur de coordonnées $(-2; 1)$.

1. Équations

- (a) Déterminer une équation de \mathcal{C} . C'est une application directe du cours : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ (en remarquant que $\sqrt{5}^2 = 5$).
 - (b) Montrer que l'équation cartésienne de \mathcal{D} , la droite passant par A de vecteur normal \vec{n} , est $-2x + y + 4 = 0$. Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{D} . Alors \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux, et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. En notant que les coordonnées de \overrightarrow{AM} sont $(x - 3, y - 2)$, on obtient : $(x - 3) \times -2 + (y - 2) \times 1 = 0$, ce qui, développé, donne l'équation demandée.
 - (c) Donner son équation réduite. On isole y dans l'équation cartésienne de \mathcal{D} , et on obtient $y = 2x - 4$.
2. Soit $M(x; y)$ un point d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} (on admet qu'un tel point existe).

- (a) Montrer que x vérifie l'équation $5x^2 - 30x + 40 = 0$. Dans l'équation de \mathcal{C} trouvée en question 1a, on remplace y par la valeur trouvée en question 1c. On obtient : $(x - 3)^2 + (2x - 4 - 2)^2 = 5$, ce qui, développé, donne l'équation demandée.
- (b) Résoudre cette équation. C'est un trinôme du second degré. Le discriminant vaut $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 5 \times 40 = 100 = 10^2$. Il est strictement positif, donc il y a deux racines qui valent $x_1 = \frac{-(-30) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 5} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-30) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 5} = 4$.
- (c) En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} . Nous avons trouvé deux abscisses x_1 et x_2 . Les ordonnées correspondantes sont les images de ces valeurs par l'équation réduite trouvée à la question 1c, c'est-à-dire, respectivement $2 \times 2 - 4 = 0$ et $2 \times 4 - 4 = 4$. Les points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} sont donc les points de coordonnée $(2, 0)$ et $(4, 4)$.