Devoir surveillé — DÉRIVATION

Deux heures ; calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Variations de fonctions — 6 points)**.**

(1) Déterminer les variations des fonctions suivantes.

(a) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) $g : x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}}$ définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$.

(2) On souhaite déterminer les variations de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3 - \sqrt{x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}$.

(a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ et vérifier que, pour $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 4x(x - \frac{1}{2})(x-1)$.

(b) En déduire les variations de g.

(c) En déduire les variations de f.

Exercice 2 (Tangentes — 4 points)**.** On considère les fonctions $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + 1$, définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

(1) À l'aide d'un tableau de valeurs (qu'il n'est pas nécessaire de faire apparaitre sur la copie), tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé dont les abscisses vont de 0 à 6, et les ordonnées de 0 à 10.

(2) Calculer les dérivées des fonctions f et g sur $]0;+\infty[$.

(3) Montrer que l'équation de la droite T_f, tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1, est $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$. De même, montrer que l'équation de T_g (tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1) est $y = \frac{3}{2}x$.

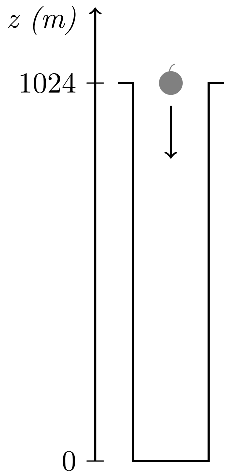
(4) Tracer les droites d'équation T_f et T_g.

(5) Démontrer que T_f et T_g sont parallèles.

Exercice 3 (Application à la physique — 6 points)**.** Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puit d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1 024 m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puit : elle est de 0 m au fond, et 1 024 m en haut.

Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.



(1) Montrer que $c = 1\,024$.

(2) La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.

  (a) Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.

  (b) En notant que la vitesse initiale est nulle, déterminer l'expression de v en fonction de a seulement.

  (c) Montrer que $z(t) = at^2 + 1024$.

(3) Isaac a mesuré que la chute a duré 14,5 s. Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$.

(4) Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure : L'intensité de la pesanteur g est égale à …

Exercice 4 (Fonctions homographiques — 4 points)**.** Le but de cet exercice est d'automatiser le calcul de la dérivée d'une fonction homographique.

Soient a, b, c et d quatre nombres réels, $c \neq 0$, et h la fonction définie et dérivable sur $]-\frac{d}{c};+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (ce genre de fonction appelée *homographique*).

(1) Montrer que pour tout $x \in]-\frac{d}{c};+\infty[$: $h'(x) = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

(2) On suppose que $ad = cb$. Étudier les variations de h sur son domaine de définition.

(3) On suppose maintenant que $ad \neq cb$. Étudier les variations de h sur son domaine de définition.

(4) Écrire un algorithme qui lit les valeurs des coefficients a, b, c et d, et qui affiche le sens de variation de h sur son domaine de définition.