Devoir surveillé — Fonctions — Vecteurs

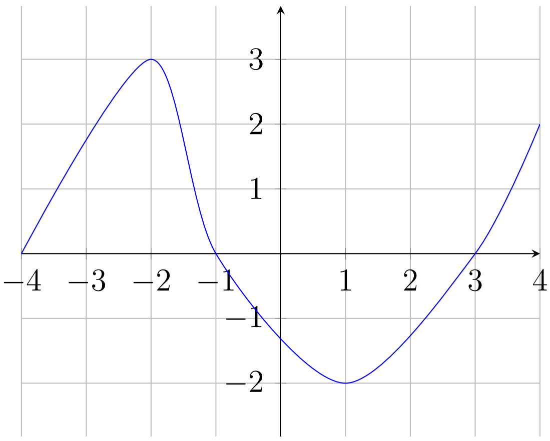
Exercice 1 (Fonctions — 5 points)**.** Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction, puis dresser son tableau de variation en utilisant les propriétés des fonctions associées.

$$\text{(a) } f : x \mapsto \frac{1-2x^2}{3}\,; \qquad \text{(b) } g : x \mapsto \sqrt{-x+7}.$$

Exercice 2 (Fonctions — 5 points)**.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$ dont la courbe $\mathcal{C}$ est représentée sur le graphique ci-contre.

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) Déterminer l'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$, puis dresser son tableau de variations.



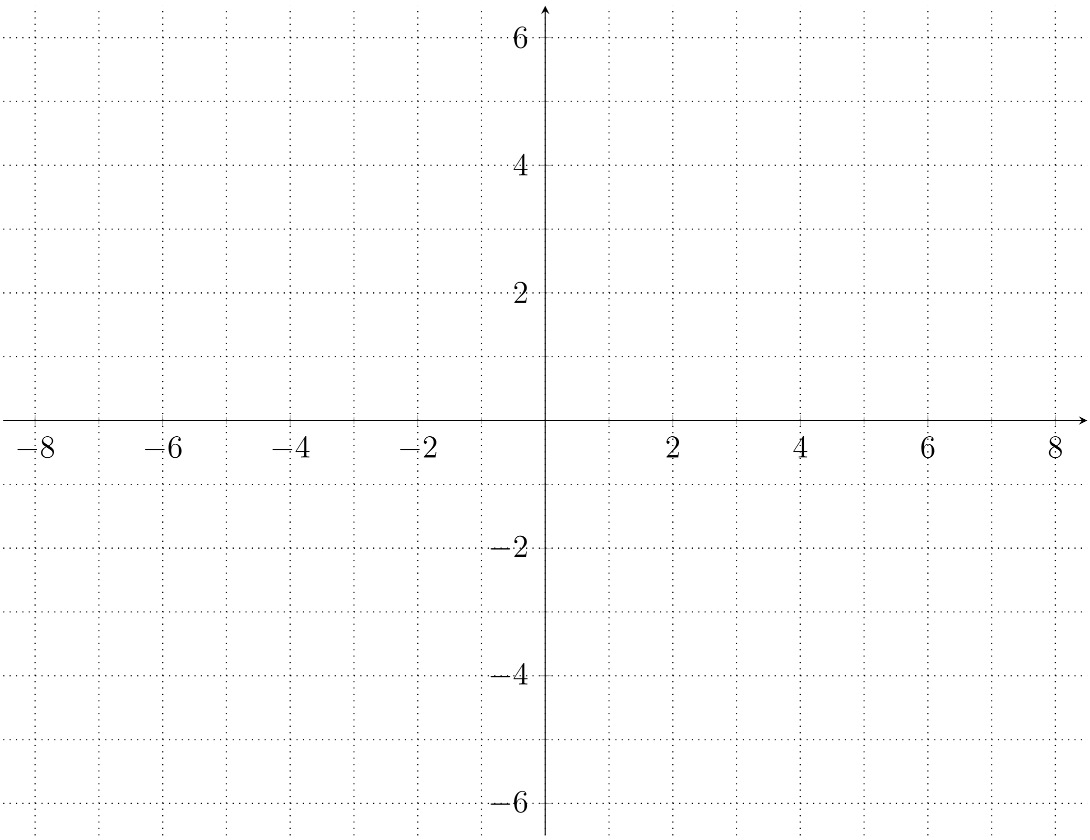
Exercice 3 (Vecteurs — 5 points)**.** Soit ABC un triangle. On difinit les points M, N et P par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = 0$ et $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

(a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis faire une figure.

(b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) En déduire que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 4 (Droites — 5 points)**.** Le plan est rapporté au repère orthonormé ci-dessous.



(a) Tracer la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$.
Préciser son coefficient directeur et donner un de ses vecteurs directeurs.

(b) Vérifier que les points $A(3;4)$ et $B(-3;0)$ sont des points de d.

(c) Construire la droite Δ passant par le point $D(2;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-6,-4)$.
Déterminer une équation cartésienne de Δ.

(d) Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles.

Exercice 5 (Bonus — 2 points)**.** Soit h la fonction homographique définie par $h : x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$, définie pour tout réel x différent de α. On considère quatre réels a, b, c, d, tels que : a et b sont inférieurs à α ; c et d sont supérieurs à α. On considère A, B, C, D les points de la courbe de h d'abscisses respectives a, b, c et d.
Le quadrilatère $ABCD$ peut-il être un parallélogramme ?
Indice : Commencer par prendre une valeur particulière pour α, puis étendre ensuite le résultat à un α quelconque.