

Devoir surveillé — FONCTIONS — VECTEURS

Exercice 1 (Fonctions — 5 points). (a) $f : x \mapsto \frac{1 - 2x^2}{3}$ C'est un trinôme du second degré : il est défini sur \mathbb{R} tout entier.

La fonction carrée est décroissante sur $] -\infty; 0]$, et croissante ensuite. La multiplication par -2 inverse le sens de variations, et l'ajout et la division par une constante ne changent pas le sens de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		$\frac{1}{3}$	

(b) $g : x \mapsto \sqrt{-x + 7}$. Une racine n'est définie que sur les positifs. Donc g n'est définie que pour $-x + 7 \geq 0$, soit pour $x \leq 0$: le domaine de définition est $] -\infty; 7]$.

La fonction $x \mapsto -x + 7$ est décroissante (fonction affine avec coefficient directeur négatif), et la fonction racine conserve le sens de variations.

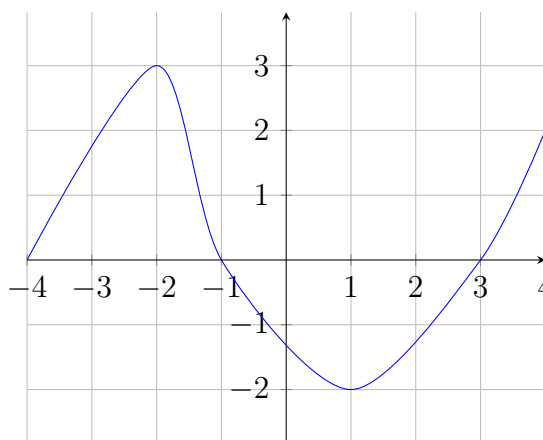
x	$-\infty$	7
g		0

Exercice 2 (Fonctions — 5 points). Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe \mathcal{C} est représentée sur le graphique ci-contre.

- (a) Dresser le tableau de variations de f . Voir question suivantes.
- (b) Déterminer l'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$, puis dresser son tableau de variations. La fonction $\frac{1}{f}$ n'est définie que si f est non nul, donc si x est différent de -4 , -1 et 3 . Donc $\mathcal{D}_{\frac{1}{f}} =] -4; -1[\cup] -1; 3[\cup] 3; 4]$.

En ce qui concerne le sens de variation, la fonction inverse les inverse. Le tableau est donc le suivant.

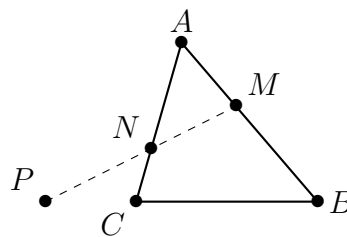
x	-4	-2	-1	1	3	4
f	0	3	0	-2	0	4
$\frac{1}{f}$		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$



Exercice 3 (Vecteurs — 5 points). Soit ABC un triangle. On définit les points M , N et P par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = 0$ et $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

- (a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur \overrightarrow{AN} en fonction du vecteur \overrightarrow{AC} , puis faire une figure.

L'énoncé nous donne : $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = 0$.
 Donc : $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CN} = 0$
 $\overrightarrow{AN} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) = 0$
 $3\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CA} = 0$
 $3\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{CA}$
 $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



(b) Exprimer les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Commençons par appliquer la relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$. Donc $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

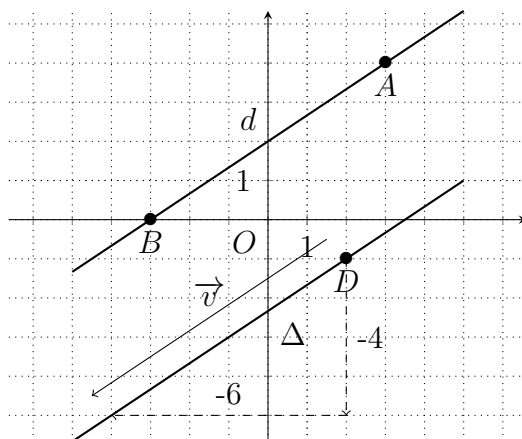
De même, pour \overrightarrow{MP} : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$. Donc :
 $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Or, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$:
 $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Enfin, en factorisant, on trouve :
 $\overrightarrow{MP} = -\frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

(c) En déduire que les points M , N et P sont alignés. Nous pouvons vérifier la condition de colinéarité des vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{MN} dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $-\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \times (-\frac{9}{10}) = 0$.
 Donc les vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires, donc les points M , N et P sont alignés.

Exercice 4 (Droites — 5 points). Le plan est rapporté au repère orthonormé ci-dessous.



(a) Tracer la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$. Le coefficient directeur est $\frac{2}{3}$ (il se lit sur l'équation réduite). Une équation cartésienne de cette droite est $\frac{2}{3}x - y + 2 = 0$, et un vecteur directeur est donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

(b) Pour vérifier que $A(3; 4)$ est un point de d , on remplace x par 3 dans l'équation de d : $\frac{2}{3} \times 3 + 2 = 4$, donc $A \in d$. Même principe pour B .

(c) Construire la droite Δ passant par le point $D(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-6, -4)$. Déterminer une équation cartésienne de Δ .

Soit $M(x, y)$ un point de Δ . Alors $\overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1/3 \end{pmatrix}$ et \vec{v} sont colinéaires : $(x - 2) \times -4 - (y + 1) \times -6 = 0$. La seule difficulté restante est de faire attention aux signes. On trouve finalement : $-4x + 6y + 14 = 0$.

(d) Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles. Vérifions que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires : $1 \times -4 - \frac{2}{3} \times -6 = 0$, donc les droites sont parallèles.