Devoir surveillé — Fonctions
Corrigé

Exercice 1 (Cours — 2 points)**.** Voir le cours.

Exercice 2 (Variation d'une fonction homographique — 4 points)**.** *Soit f la fonction définie par $x \mapsto \frac{2x+2}{x-4}$.*

(a) *Déterminer le domaine de définition de f, que l'on appellera $\mathcal{D}_f$ par la suite.*

Le dénominateur d'une fraction ne pouvant être nul, f n'est définie que si $x - 4 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 4$.
Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{4\} =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ (ces deux écritures sont équivalentes).

(b) *Démontrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) = 2 + \frac{10}{x-4}$.*

Soit $x \in \mathcal{D}_f$ quelconque.

$$2 + \frac{10}{x-4} = \frac{2(x-4)}{x-4} + \frac{10}{x-4} = \frac{2(x-4)+10}{x-4} = \frac{2x+2}{x-4} = f(x)$$

(c) *Déterminer les variations de $x \mapsto x - 4$, puis celles de $x \mapsto \frac{1}{x-4}$, puis celles de f, sur $\mathcal{D}_f$.*

$x \mapsto x - 4$ est une fonction affine de coefficient directeur positif : elle est croissante.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-4}$ étant l'inverse d'une fonction croissante, elle est décroissante sur $]-\infty; 4[$ et sur $]4; +\infty[$.
Enfin, puisque $f(x) = 2 + \frac{10}{x-4}$, et que le produit d'une fonction par un nombre positif (ici 10), et l'ajout d'un nombre à une fonction (ici 2) ne modifient pas les variations, f a les mêmes variations que $x \mapsto \frac{1}{x-4}$.
Il était aussi possible de présenter les résultats dans un tableau (mais les justifications en français restent nécessaires) :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x \mapsto x - 4$	$\nearrow$		
$x \mapsto \frac{1}{x-4}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Exercice 3 (Valeur absolue — 4 points). *Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $|x-2|+|x+5|=11$, appelée (E) par la suite.*

(a) *Premier cas : $x<-5$.*

(i) *Pour $x<-5$, simplifier l'expression $|x-2|+|x+5|$.*

La définition de la valeur absolue est :

Pour $y \in \mathbb{R}$, $|y| = \begin{cases} y \text{ si } y \geqslant 0 \\ -y \text{ si } y < 0 \end{cases}$

Le réel x étant inférieur à -5, $x-2$ est négatif, donc $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. De même, $|x+5| = -(x+5) = -x-5$. Donc $|x-2|+|x+5| = -x+2-x-5 = -2x-3$.

(ii) *Résoudre l'équation (E) pour $x<-5$.*

$$\begin{aligned} |x-2|+|x+5| &= 11 \\ -2x-3 &= 11 \\ x &= \frac{14}{-2} = -7 \end{aligned}$$

Vérification (ça n'est pas demandé, mais je vous conseille de faire ça au brouillon) :

$$|-7-2|+|-7+5| = |-9|+|-2| = 9+2 = 11.$$

(b) *En utilisant la même méthode, résoudre l'équation (E) pour $x \in [-5;2]$.*

Pour $x \in [-5;2]$, $x-2$ est négatif, et $x+5$ est positif, donc :

$$\begin{aligned} |x-2|+|x+5| &= -(x-2)+(x+5) \\ &= -x+2+x+5 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Donc l'équation $|x-2|+|x+5|=11$ n'a pas de solutions sur cet intervalle.

(c) *En utilisant la même méthode, résoudre l'équation (E) pour $x>2$.*

Enfin, dans ce cas, $x-2$ et $x+5$ sont positifs, donc $|x-2| = x-2$ et $|x+5| = x+5$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |x-2|+|x+5| &= 11 \\ (x-2)+(x+5) &= 11 \\ 2x+3 &= 11 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(d) *Conclure.* En faisant le bilan des trois cas étudiés, on en déduit que l'équation (E) a deux solutions : -7 et 4.