Devoir surveillé — Corrigé

Exercice 1 (Suites — 9 points)**.**

1. On note u_0 le premier remboursement et u_1, u_2... les remboursements suivants, et on admet que u est une suite arithmétique de premier terme 15 000 et de raison 1 800.
   (a) *Quel est le montant du dernier versement ?* Il y a sept remboursements à faire, de u_0 à u_6. Le dernier est donc :
   $u_6 = u_0 + 6r = 15000 + 6 \times 1800 = 25800$ €.
   (b) *Quel est le total des sept versements ?* La somme de termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule :
   $$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$
   Donc la somme des versements est $7 \times \frac{15000+25800}{2} = 142800$ €.
2. La banque B lui propose de rembourser ce prêt sur sept ans, en sept versements : le premier remboursement serait d'un montant de 20 000 euros et les remboursements suivants augmenteraient de 2 % par rapport au remboursement précédent.
   On note v_0 le premier remboursement et v_1, v_2... les remboursements suivants.
   (a) *Calculer v_1 et v_2.*
   $v_1 = v_0 + 0,02 \times v_0 = v_0(1 + 0,02) = v_0 \times 1,02 = 20400$ €
   De même, $v_2 = 1,02 \times v_1 = 20808$ €
   (b) *On admet que (v_n) est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.* C'est une suite géométrique de premier terme 20000 et de raison 1,02.
   (c) *Quel est le total des sept versements ?* La somme de termes d'une suite géométrique est donnée par la formule
   $$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$
   Le total versé est donc $20000\frac{1-1,02^7}{1-1,02} \approx 148685,67$ €.
3. *Quelle est la proposition la plus avantageuse ?* La première proposition, qui coûterait au total environ 142000 euros, est plus avantageuse que la seconde, qui couterait environ 149000 euros.

Exercice 2 (Loi binomiale — 11 points)**.**

1. *On s'intéresse à l'expérience aléatoire « On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 obtenus.*
   (a) *Cette variable X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?* Il s'agit de 4 répétitions d'une expérience ayant une probabilité $\frac{1}{6}$ de succès (car le dé est équilibré), donc X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$.
   (b) *Calculer $P(X = 0)$.* Cette probabilité est donnée par la formule $P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48$.
   (c) *En déduire une valeur approchée à 10^{-2} de $P(X \geqslant 1)$.* Puisque les évènements $X \geqslant 1$ et $X = 0$ sont contraires, on a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,48 \approx 0,52$.
2. *On considère la seconde expérience aléatoire : « On lance huit fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 obtenus, et on admet qu'elle suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{6}$.*
   (a) $P(Y = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^8$
   $P(Y = 1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-1} = 8\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{4}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^7$
   (b) Puisque les évènements $X = 0$ et $X = 1$ sont incompatibles, on a :
   $$\begin{aligned} P(Y \leqslant 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \frac{8}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= \frac{13}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7 \end{aligned}$$
   (c) Les évènements $Y \geqslant 2$ et $Y \leqslant 1$ étant contraires, on a :
   $$\begin{aligned} P(Y \geqslant 2) &= 1 - P(Y \leqslant 1) \\ &= 1 - \frac{13}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &\approx 0,40 \end{aligned}$$
3. La première probabilité est 0,52, et la seconde 0,40 : il y a plus de chances d'obtenir un 1 en quatre lancers que deux 1 en huit lancers.