Devoir surveillé — Correction

Exercice 1 (Cours et application directe — 7 points)**.**

Les questions sont indépendantes.

1. *Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$.*
   (a) *Calculer u_2.* $u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 2$, et $u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0$.
   (b) *Donner le cinquième terme de cette suite.* La difficulté ici est de ne pas se tromper d'indice : u_0 est le premier terme, u_1 le deuxième, …et u_4 le cinquième. Le cinquième terme est donc $u_4 = -12$.
2. *Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison 3. Quelle est la formule explicite de v_n (pour $n \in \mathbb{N}$) ?* $v_n = v_0 + r \times n$ (où r est la raison), donc $v_n = 8 + 3n$.
3. *Soit w la suite définie par $w_0 = 1729$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n + 1$. On admet que tous les termes de w sont strictement positifs. Déterminer les variations de w.* Il y a différentes méthodes ; nous allons ici calculer la différence $w_{n+1} - w_n$: $w_{n+1} - w_n = 2w_n + 1 - w_n = w_n + 1$. Or w_n est positif, donc $w_n + 1$ aussi, donc $w_{n+1} - w_n$ est positif : la suite est croissante.
4. *Démontrer que pour tout entier n non nul, on a :* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voir le cours.

Exercice 2 (Algorithmique — 6 points)**.**

Adapté du Bac S 2012.

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.
On considère l'algorithme suivant.

```
Lire n
0 → u
Pour k allant de 1 a n
Faire
  u + k² → u
FinPour
Afficher u
```

1. *Donner la valeur affichée par cet algorithme si l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.* Pour $n = 3$, le contenu de la boucle est exécutée 3 fois. À la fin de la première fois, u vaut $0 + 1^2 = 1$; à la fin de la deuxième fois, u vaut $1 + 2^2 = 5$; et enfin, la troisième fois, u vaut $5 + 3^3 = 14$.

2. *Modifier l'algorithme afin qu'il affiche la valeur de u_n si l'utilisateur entre la valeur de n.* L'algorithme calcule la valeur $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Pour obtenir u_n, il suffit donc de diviser par n^3. Il faut donc remplacer la dernière ligne « **Afficher** u » par « **Afficher** $\frac{u}{n^3}$ ».

3. *Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.*

n	*5*	*10*	*20*	*50*	*100*	*1000*
u_n	*0,440*	*0,385*	*0,358*	*0,343*	*0,338*	*0,334*

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite. N'importe quelle conjecture cohérente est valide. Le comportement réel de cette suite est : elle est strictement décroissante, et tend vers $\frac{1}{3}$.

Exercice 3 (Géométrie — 7 points)**.** On considère les points $A(2;1)$ et $B(1;2)$ dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.* La formule générale d'une équation du cercle est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$, donc cela donne $(x - 2)(x - 1) + (y - 1)(y - 2) = 0$.

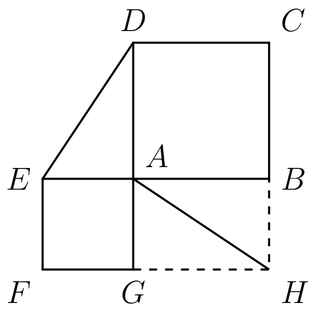
2. *On appelle Δ la médiatrice du segment $[AB]$ (rappel : la médiatrice de $[AB]$ est la droite constituée de l'ensemble des points à égale distance de A et B).*
   Soit $M(x; y)$ un point de Δ.
   (a) *Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de x et y.* La longueur d'un segment en fonction des coordonnées de ses extrémités est donnée par la formule $AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$, donc $AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$. De même, $BM^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$.
   (b) *Montrer que l'équation réduite de Δ est $y = x$.* Puisque la M est sur la médiatrice de $[AB]$, $AM = BM$, et $AM^2 = BM^2$. Donc $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$. En développant cet expression et en isolant les x à gauche et les y à droite, on obtient $x = y$.

3. *En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.* Soit un point $M(x; y)$ appartenant à $\mathcal{C}$ et Δ. Ce point vérifie donc les deux équations trouvées en 1 et 2b. En particulier, puisque $y = x$, on peut remplacer y par x dans l'équation de $\mathcal{C}$ pour obtenir $(x - 2)(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = 0$, soit $2(x - 2)(x - 1) = 0$. C'est une équation produit qui a deux solutions : $x = 1$ et $x = 2$.
   Ce sont les abcisses des deux points d'intersection. Les ordonnées sont données par la formule de la droite $y = x$. Donc les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(1, 1)$ et $(2, 2)$.

Exercice 4 (Perpendicularité — 3 points)**.** *Toute trace de recherche sera valorisée, même si elle n'aboutit pas.*

On considère la figure ci-contre. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés, et $ABHG$ est un rectangle.

Démontrer que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires.



Il y a différentes manières de résoudre cet exercice (dont une est faisable en début de collège). Nous allons ici utiliser les vecteurs.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH}$. En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH}\right)$

Nous développons :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GH}$

(EA) et (AG) sont perpendiculaires, de même que (AD) et (GH), donc les produits scalaires $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GH}$ sont nuls. Donc :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG}$

Restent deux produits scalaires. On note que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GH} = EA.GH$ (car $\cos(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{GH}) = 1$), et que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} = -AD.AG$ (car $\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}) = -1$). Enfin, puisque $EA = AG$ et $GH = AD$, on a :

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AH} = EA.GH - AD.AG = EA.GH - GH.EA = 0.$

Donc (ED) et (AH) sont perpendiculaires.