Devoir à la maison

Loi binomiale — Suites — Un peu de géométrie

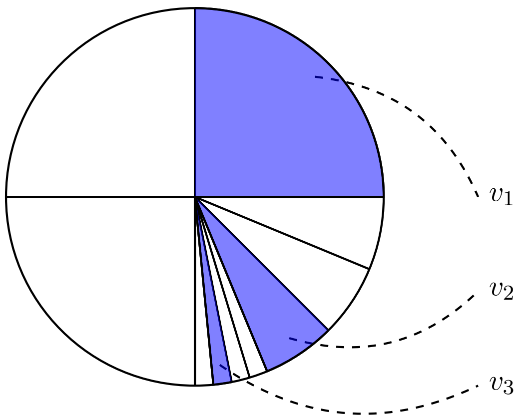
**Exercice 1** (Tarte)**.** Le 14 mars, pour célébrer le jour de $\pi$, vous partagez une tarte (assimilée à un cercle par la suite) avec deux amis. Vous souhaitez couper cette tarte en trois parts égales. Nous allons étudier différentes approches.

1. *En utilisant la trigonométrie.* D'Euclide ($\approx$ 300 ans avant J.C.) jusqu'à la fin du XIX$^{e}$ siècle (avec entre autres Gauss et Wantzel, s'appuyant sur les avancées faites par Galois), les mathématiciens se sont intéressés aux constructions à la règle et au compas, c'est-à-dire à toutes les figures géométriques, ou plus simplement toutes les longueurs, pouvant être tracées en utilisant uniquement une règle non-graduée et un compas, en un nombre fini d'étapes.

   En remarquant que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, proposer une méthode pour couper cette tarte en trois parts égales, à la règle (non graduée) et au compas. Il pourra être utile de se souvenir des méthodes de tracé vues au collège (symétrique, bissectrice, médiatrice, etc.).

2. *En utilisant les suites.* On commence par couper la tarte en quatre parts égales, et chacun des trois convives prend une part. Puis on coupe la part restante en quatre parts, et chacun prend une part. Puis on recommence sur la part restante, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste que des miettes.

   On considère que l'aire de la tarte est égale à 1.



(a) Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : « $v_n$ est la taille de la part de tarte prise par chacun des convives après la $n^{\text{e}}$ coupe ». Donner les valeurs de $v_1$, $v_2$, $v_3$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation y a-t-il entre $v_n$ et $v_{n+1}$ ? En déduire la nature de la suite $v$.

(c) On note $P_n$ la part totale de tarte de chaque convive après $n$ coupes, c'est-à-dire la somme des parts prises au cours de ces coupes : $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

   i. Exprimer $P_n$ en fonction de $n$ (ne pas simplifier).

   ii. Simplifier l'expression de $P_n$ pour obtenir : $P_n = \frac{4^n-1}{3\times 4^n}$.

   iii. Calculer $P_3$.

(d) En utilisant l'outil de votre choix (calcul rigoureux (hors programme), table de valeurs, représentation graphique, tableur, calculatrice...), conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ (on admet que cette limite existe).

(e) Conclure : Cette méthode permet-elle de découper la tarte en trois part égales ?

(f) *(Optionnel)* Étant donné un entier $k$ non nul, refaire les questions (a) à (e) en considérant que l'on veut découper la tarte en $k$ parts.

3. *Pour aller plus loin*

   (a) *Règle et compas* Dans la question 1, il a été question de couper un angle (l'angle plat) en trois angles égaux à la règle et au compas. Pouvez-vous trouver une méthode pour découper un angle *quelconque* en trois angles égaux à la règle et au compas ? Vous pouvez chercher de l'aide sur internet.

(b) *(Optionnel) Théorie des jeux* Les méthodes étudiées dans cet exercices mettent en jeu des découpages supposés parfaits. Mais en réalité, la tarte n'est pas vraiment circulaire, le couteau ne suit pas exactement une ligne droite, etc. ce qui fait qu'il risque d'y avoir une part plus grosse que les autres, et qu'un (ou plusieurs) des convives se sente lésé.

Une stratégie pour partager une tarte entre deux personnes (que nous nommerons Alice et Bob) sans qu'aucune des deux ne se considère lésée consiste en : (i) Alice découpe la tarte en deux, (ii) Bob choisit sa part, (iii) Alice prend la part restante. En utilisant cette méthode, on peut supposer qu'Alice va faire des parts qu'elle va considérer égales, pour que, quand Bob prendra la plus grosse, il reste tout de même à Alice une part proche de la moitié.

Cette stratégie ne fonctionne pas avec trois participants : la première personne ayant coupé la tarte en trois, si la seconde personne choisit sa part, la troisième peut se sentir lésée.

Imaginer une stratégie pour couper une tarte entre trois personnes, telle qu'aucune des trois personnes se se sente lésée à la fin du partage.

**Exercice 2** (Rumeur)**.** Un farceur publie une vidéo sur un site web de partage de vidéos en ligne, essayant de démontrer que le président de la république est un extraterrestre. Le lendemain, il en parle à 2 de ses connaissances. Le lendemain, convaincus par cette démonstration, chacune des 2 personne en parle à 2 nouvelles personnes.

La rumeur se propage, et chaque jour, les personnes qui viennent d'apprendre la nouvelle la veille la présentent à deux nouvelles personnes. On suppose que personne ne propage la rumeur auprès d'une personne la connaissant déjà.

Ainsi, 1 personne est au courant de la rumeur le premier jour, $1+2 = 3$ le deuxième jour, $3 + 2 \times 2 = 7$ le troisième jour, $7 + 4 \times 2 = 15$ le quatrième jour, et ainsi de suite.

1. Combien de personnes connaissent la rumeur au bout de 10 jours ?
2. Au bout de combien de jours le nombre de personnes connaissant la rumeur dépasse-t-il la population française ?
3. Au bout de combien de jours la population mondiale est-elle au courant ?