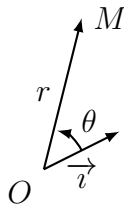


DEVOIR À LA MAISON Coordonnées polaires

Définition. On appelle *repère polaire* du plan tout couple (O, \vec{i}) , où O est un point appelé origine (ou pôle), et \vec{i} un vecteur de norme 1.

Pour tout point M du plan distinct de O , il existe un couple (r, θ) avec r un nombre strictement positif, et θ un nombre réel tels que : $OM = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



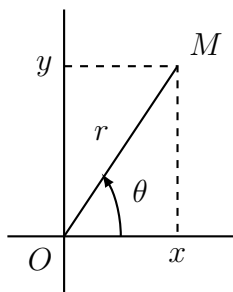
On dit que (r, θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M dans le repère (O, \vec{i}) .

Remarque.

- À chaque couple (r, θ) avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$ correspond un unique point du plan.
- À un point M du plan distinct de O correspond une infinité de couples (r, θ) avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, car θ est défini à $2k\pi$ près.
- On convient que le pôle O a pour coordonnées $(0, \theta)$ avec θ quelconque.

1. Démontrer la propriété suivante : Si le point M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans le repère orthonormal vecteur $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et pour coordonnées polaires (r, θ) dans le repère polaire (O, \vec{i}) , alors on a $x =$

$$r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ et } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Soient $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct d'unité 2 cm, et $(0, \vec{i})$ le repaire polaire associé. On considère les points A de coordonnées cartésiennes $(-2, 2)$, B de coordonnées polaires $(2; \frac{3\pi}{4})$, et C de coordonnées polaires $(1, \alpha)$, où $\alpha \in [\pi; 2\pi[$ est tel que $\cos \alpha = \frac{1}{4}$

2. Faire une figure.
3. Calculer $\sin \alpha$, et déterminer les coordonnées cartésiennes de C .
4. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B .
5. Déterminer les coordonnées polaires de A .
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r et θ pour qu'un point M quelconque du plan de coordonnées polaires (r, θ) , avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$ appartienne à la demi-droite $]OA)$.
7. Déterminer la mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) . En déduire les coordonnées cartésiennes du centre du cercle circonscrit au triangle OAB .
8. Hachurer la surface constituée des points M de coordonnées polaires (r, θ) avec $r \in [1; \sqrt{2}]$ et $\theta \in]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[$. Déterminer l'aire de cette surface.