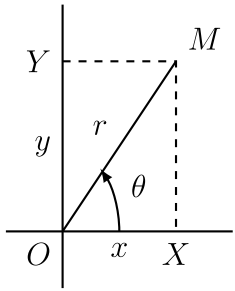
Devoir à la maison

Coordonnées polaires – Correction

Pour tout point M du plan distinc de O, il existe un couple (r, θ) avec r un nombre strictement positif, et θ un nombre réel tels que : $OM = r$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On dit que (r, θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath})$.

1. Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y), et de coordonnées polaires (r, θ). Par définition des deux systèmes de coordonnées, $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$, $OM = r$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).



Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OM}$ de deux manières différentes.

— D'une part, $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OM} = ||\overrightarrow{\imath}|| \times \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \cos(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = OM\cos(\theta + 2k\pi) = OM\cos\theta$.

— D'autre part, $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\imath}.(x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}) = x\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath} = x$.

Donc $x = OM\cos\theta$.

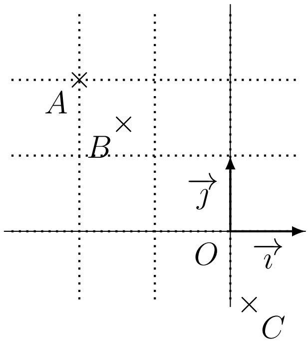
De même, calculons $\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{OM}$. En utilisant la même méthode, on obtient $\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{OM} = OM\cos(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{OM}) = y$. Or, par la relation de Chasles sur les angles orientés, on a $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath}) + (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Donc $\cos(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{OM}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \pi) = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$.

Donc $y = OM\sin\theta$.

Enfin, la longueur du segment OM est égale à $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ (puisque (x, y) et $(0, 0)$ sont les coordonnées cartésiennes de M et O), donc $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soient $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *un repère orthonormal direct d'unité 2 cm, et* $(0, \overrightarrow{\imath})$ *le repaire polaire associé. On considère les points A de coordonnées cartésiennes* $(-2, 2)$*, B de coordonnées polaires* $\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$*, et C de coordonnées polaires* $(1, \alpha)$*, où* $\alpha \in [\pi; 2\pi[$ *est tel que* $\cos\alpha = \frac{1}{4}$

2. *Faire une figure.*



3. *Calculer* $\sin\alpha$*, et déterminer les coordonnées cartésiennes de C.* On sait que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, donc $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$. Donc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Mais puisque $\alpha \in [\pi; 2\pi[$, $\sin\alpha \leqslant 0$, et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.
   Donc les coordonnées cartésiennes de C sont $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, soit $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.
4. *Déterminer les coordonnées cartésiennes de B.* En utilisant la formule démontrée en question 1, on obtient comme coordonnées polaires de B : $\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right); 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, soit $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ (car $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
5. *Déterminer les coordonnées polaires de A.* On cherche des coordonnées polaires de A sous la forme (r, β). Par la formule démontrée en première question, on a $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. On cherche maintenant un angle β tel que :

$$\begin{cases} -2 = 2\sqrt{2}\cos\beta \\ 2 = 2\sqrt{2}\sin\beta \end{cases}$$

   ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Prenons la première équation : $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$. Donc $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi$, ou $\beta = -\frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi$ (pour un certain $k_1 \in \mathbb{Z}$). De même, pour la seconde équation, on trouve $\beta = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi$ ou $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi$ (pour un certain $k_2 \in \mathbb{Z}$). On a donc :

$$\begin{cases} \beta = \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi, \text{ ou } \beta = -\frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi \\ \beta = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi \text{ ou } \beta = \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$$

La seule solution est $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

Des coordonnées polaires de A sont donc $\left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

6. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur r et θ pour qu'un point M quelconque du plan de coordonnées polaires (r, θ), avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appartienne à la demi-droite $]OA)$.* Il faut que la mesure principale de θ soit $\frac{3\pi}{4}$, et que $r > 0$. La démonstration n'était pas demandée. La voici tout de même.

   La première difficulté est de définir de manière analytique (avec des équations) de cette droite. Une manière de faire cela est de dire que c'est les points de la droite d'équation $x+y=0$ vérifiant $x > 0$.

   Soint M un point de $]OA)$. On appelle (x, y) ses coordonnées cartésiennes, et (r, θ) ses coordonnées polaires. On a donc $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Puisque M est sur la demi droite, $x + y = 0$, donc $r\cos\theta + r\sin\theta = 0$, donc $r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$. Le réel r est strictement positif (car $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $x > 0$), donc $\cos\theta + \sin\theta = 0$, ou encore $\cos\theta = -\sin\theta$.

   Nous obtenons une équation trigonométrique. Celles que nous savons résoudre sont de la forme $\cos A = \cos B$ ou $\sin A = \sin B$, donc nous allons nous y ramener en remarquant (propriété des angles associés) que $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$. Donc $\cos\theta = - - \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$.

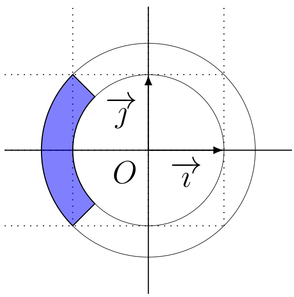
   Cette équation trigonométrique a deux familles de solutions : $\theta = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ (pour $k \in \mathbb{N}$). La première des deux équations n'a pas de solutions, donc on a $\theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$.

   Ainsi, $2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, et $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Cela signifie que la mesure principale de θ est égale à $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$, mais puisque M est sur la demi-droite $]OA)$, la première solution est exclue.

Ainsi, si M est sur la demi-droite $]OA)$, la mesure principale de θ est égale à $\frac{3\pi}{4}$, et $r > 0$.
Réciproquement, si $r > 0$ et la mesure principale de θ est $\frac{3\pi}{4}$, alors $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\frac{3\pi}{4} \\ y = r\sin\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$. Donc $\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$, et les coordonnées (x, y) de M vérifient bien les conditions pour appartenir à la demi-droite $]OA)$.

7. *Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire les coordonnées cartésiennes du centre du cercle circonscrit au triangle OAB.* Appliquons la relation de Chasles : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{\imath}) + (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 0$. Le polygone AOB est donc un *triangle plat*, et il n'a pas de cercle circonscrit (désolé, c'était une erreur d'énoncé).

8. *Hachurer la surface constituée des points M de coordonnées polaires (r, θ) avec $r \in [1; \sqrt{2}]$ et $\theta \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[$. Déterminer l'aire de cette surface.*



Commençons par calculer l'aire de la couronne : elle est égale à la différence de l'aire du disque extérieur (de rayon $\sqrt{2}$) et de celui du disque intérieur (de rayon 1), soit $\pi\sqrt{2}^2 - \pi 1^2 = \pi \times 2 - \pi \times 1 = \pi$.
L'angle de la section de couronne qui nous intéresse vaut $\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$, soit $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Cela correspond à un quart de la couronne complète, donc l'angle de la partie hachurée est $\frac{\pi}{4}$.