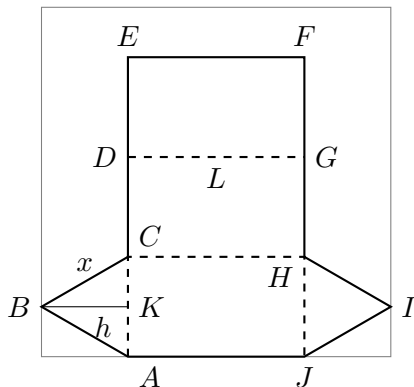


DEVOIR À LA MAISON — CORRIGÉ  
Analyse

**Exercice 1** (Optimisation).



Le patron est construit dans un carton carré de côté 21 cm. Les triangles  $ABC$  et  $HIJ$  sont équilatéraux; les longueurs  $AC$ ,  $CD$  et  $ED$  sont égales à  $BC$ ; les quadrilatères  $ACHJ$ ,  $CHGD$  et  $DGFE$  sont des rectangles.

On appelle  $x$  la longueur  $BC$ ,  $L$  la longueur  $DG$ , et  $h$  la longueur  $BK$ , hauteur du triangle  $ABC$ .

Les pointillés marquent les traits de pliure.

1. Calculs préliminaires

(a) *Montrer que  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ .*

Il y a (au moins) deux manières de prouver cela.

**Pythagore** Le triangle  $CKB$  étant rectangle en  $K$ , on y applique le théorème de Pythagore :  $BC^2 = BK^2 + KC^2$ . Donc  $x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ , et on en déduit  $h$  en l'isolant.

**Trigonométrie** Le triangle  $BCK$  étant rectangle,  $\widehat{BKC} = 90^\circ$ ; le triangle  $ABC$  étant équilatéral,  $\widehat{KCB} = 60^\circ$ . Donc  $\widehat{CBK} = 30^\circ$ , et  $\cos 30 = \frac{h}{x}$ . Puisque  $\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , on en déduit le résultat demandé.

(b) *Exprimer la longueur  $L$  en fonction de  $x$ .* En considérant le segment  $[BI]$ , de longueur 21, on a :  $21 = 2h + L = 2\frac{\sqrt{3}}{2}x + L$ . Donc  $L = 21 - \sqrt{3}x$ .

2. *Quelles valeurs peut prendre  $x$  ?* Étudions cette fois le segment  $[AE]$ , égal à  $3x$ . Ce segment doit être inférieur à 21, donc  $3x \leq 21$ .

21, c'est-à-dire  $x \leq 7$ . De plus,  $x$  est une longueur, donc positif. Ainsi :  $x \in [0; 7]$ .

3. Étude de la fonction volume

- (a) La boîte est un prisme droit à base triangulaire. Son volume est égal au produit de l'aire de la base par sa hauteur.

Donc

$$V = \mathcal{A}_{ABC} \times L = \frac{h \times x}{2} \times L = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} x \times x \times (21 - \sqrt{3}x).$$

En développant, cela donne :  $V = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{21\sqrt{3}}{4}x^2$ .

- (b) Montrer que la fonction  $V$  est dérivable, et calculer sa dérivée.

$V$  est une fonction polynôme : elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Sa dérivée est :

$$V'(x) = -\frac{3}{4} \times 3x + \frac{21\sqrt{3}}{4} \times 2x = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{21\sqrt{3}}{2}x$$

- (c) Résoudre  $V'(x) \geq 0$ .  $V'$  est un polynôme du second degré. Nous pouvons utiliser nos connaissances sur les trinômes pour résoudre cette inéquation. Je propose une autre méthode. Une racine évidente étant  $x = 0$ , on peut factoriser  $V'$  :  $V'(x) = x \left( -\frac{9}{4}x + \frac{21\sqrt{3}}{2} \right)$ .

Un tableau de signe nous donne ensuite :  $V'(x) \geq 0$  pour  $x \in [0; \frac{14\sqrt{3}}{3}]$ .

- (d) Dresser le tableau de variation de  $V$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{14\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$V'(x)$	-	$\underset{\cdot}{0}$	+	$\underset{\cdot}{0}$	-
$V$					

4. Conclure : Quelle valeur doit prendre  $x$  pour que la boîte ait le plus gros volume ? Le tableau de variation nous donne un maximum pour  $V$  en  $x = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ . Mais nous avons montré à la question 2 que  $x \leq 7$ . Or  $\frac{14\sqrt{3}}{3} \approx 8,1$ . Donc la valeur maximale de  $V$  est atteinte pour  $x = 7\text{cm}$ .